SOLUTIONS ENTIÈRES D'ÉQUATIONS HESSIENNES

Mouhamad Hossein

UNIVERSITÉ DE NICE–SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences
École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

T H È S E

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'UNIVERSITÉ de Nice–Sophia Antipolis

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue par

Mouhamad HOSSEIN

SOLUTIONS ENTIÈRES D'ÉQUATIONS HESSIENNES

Thèse dirigée par **Philippe DELANOË**

Soutenue le 12 Mai 2009

Membre du jury :

M. Arnaud BEAUVILLE	Professeur à l'Université de Nice-France	Président
M. Nassif GHOUSSOUB	Professeur à l'Université de British Columbia-Canada	Rapporteur
M. Philippe DELANOË	Directeur de recherches au CNRS-France	Directeur
M. Erwann DELAY	Maître de conférences à l'Université d'Avignon-France	Rapporteur
M. Olivier DRUET	Chargé de recherche CNRS, ENS Lyon-France	Examinateur

Laboratoire J.-A. Dieudonné
Université de Nice
Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

À ma mère

À mon père

À mes frères et soeurs

À ma famille

À mes amis

À mechmech

Remerciements...

Je tiens à exprimer ma gratitude, ma reconnaissance et mes profonds remerciements à mon directeur de thèse Philippe Delanoë. Je le remercie chaleureusement pour sa confiance, ses conseils précieux et pour le temps qu'il m'a accordé malgré son emploi de temps surchargé avec la direction de l'équipe. Philippe, j'ai apprécié chez vous la qualité d'un grand chercheur plein d'optimisme, le sens de la rigueur et les qualités humaines ; bonne humeur agrémentée de larges sourires, sympathie couronnée d'une énorme modestie, et soutien. Je ne voudrais pas oublier de dire : derrière chaque grand homme il y a une femme ; je La remercie avec toute la famille pour son accueil chaleureux.

Mes remerciements les plus respectueux vont à monsieur Arnaud Beauville d'avoir accepté d'être Président du Jury, et aux Professeurs Nassif Ghoussoub et Erwann Delay qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ce travail et Olivier Druet d'être membre du Jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Mes meilleurs remerciements s'adressent à mes soeurs et mes frères (Ahmad et sa femme Widad et son fils Hanzoul), (Mahmoud qui est venu d'Australie pour assister ma soutenance), (Mira et son fiancé Firas), (Marwa et son fiancé Bilal), (Ali et son amour qu'il le cherche aux yeux verts !) et (Foufou que j'aime profondément).

Je suis également reconnaissant á mes grands-parents, mes oncles Mahmoud (Souad), Mohamed (Harba), Ahmad (Amina), Ali (Mona), Hicham (Samia), Saad (Sabah), Ziad (Iman), et Hussein (Yolla) et mes tantes Rabi3a (Omar), Harba (Ali), Alia (Hussein), Hanan (Mouhamad) et Hala (Hossein) qui n'ont cessé de me soutenir, merci du fond du coeur.

Je remercie tous les membres de l'équipe géométrie et analyse et le personnel du laboratoire J.-A. Dieudonné, chercheurs, enseignants, doctorants, informaticiens, secrétaires et techniciens qui rendent l'ambiance vraiment agréable et détendue, notamment Patrick Cassam-Chenaï qui m'avait suivi et encadré tout au long de mon stage en master 2, André Hirschowitz pour le foot et Frédéric Robert pour son aide.

Je remercie aussi la Faculté des Sciences III de l'Université Libanaise de laquelle j'ai obtenu ma maîtrise en mathématiques pures en 2005.

Je remercie, particulièrement, mes deux frères en France Hayssam & Osman où nous avons vécu des magnifiques moments que je n'oublierai jamais de toute ma vie ; mes amis libanais en France, Hamad mon binôme de bureau qui me supportait anonymement, (al mathématicien lekbir elli 3endou 1000 kteb) Sarrage, (la personne qui m'a guidé et supporté quand je suis arrivé à Nice) Houssam Yehya, (notre ingenieur) Houssam, (al adami !) Kaddour, (abou chhab) Samer, (lsanyoura) Abou taher, (le sportif) Taleb, (almou7eb l mou5les) Bilal, (alche5) Abou charif, (el5al) Maher, (m3almou la Riemann) Chadi, (l7akim) Mazen, (8 mars) ali samad, (l3aris) Habli, (al 3ekkari) Haffar, (el batal) Ali Omar, (alchimiste) Walid Maksoud, (abou Salwa) Mohamed ; mes amis au Liban (Dr Mouhamad)^3, Ramez, Mazen, Walid, Rami, Fidaa, Amal, Osman, Raafat, Abou 3ali, Akram, Khaled^3, Elmoudir et bien sûr Ahmad et Mouhamad

Taleb. Mes amis syriens (la première personne que j'ai rencontré en France) Louay, (abou cham) Ansar, (abou 7ala) Soleman, (abou yara) Sami et (chriki l3aziz) Ahed ; et d'autres nationalités Sidi Amin, Anwar, Nadia, Christina, Thomas, Thang, Dang, Lorenzo et mes ex-binômes Marchello et Olivier... Mes chers amis, désolé si j'ai oublié des noms ! vous êtes tous dans mon coeur.

Je garde le meilleur pour la fin, je m'incline respectueusement devant les deux êtres à qui je dois mon existence, "Hanzal ♡ Layla". J'ai longtemps cherché les mots qui seraient les plus justes pour vous remercier d'être toujours présents et de m'épauler quoi qu'il arrive... mais après mûre réflexion, je ne vois rien d'aussi fort que "je vous aime". Tout ceci n'aurait pas été possible sans vous. C'est donc à vous que je dédie cette thèse.

Désolé mon amour, je t'ai oubliée... mais tu es toujours dans mon coeur ma belle ! ! !

≪ Je ne suis pas responsable de tout ce qui m'arrive,
mais je suis responsable de ce que j'en fais≫.

Jacques Salomé

J'arrive Liban ; Au revoir France.

Mouhamad HOSSEIN

ENTIRE SOLUTIONS OF HESSIAN EQUATIONS

Mouhamad HOSSEIN
Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné,
Université de Nice, Parc Valrose,
06108 Nice Cedex 02, France.

Mots-clés : Équations hessiennes, Espaces de Hölder à poids, Estimation *a priori*, Méthode de continuité, Équations non linéaires elliptiques, Solutions entières.

Key words : Hessian equations, Weighted Hölder spaces, *A priori* estimates, Method of continuity, Nonlinear elliptic equations, Entire solution.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Soit m_κ la moyenne symétrique élémentaire d'ordre κ à $n \geq \kappa$ variables, homogène de degré 1 et telle que $m_\kappa(1, \ldots, 1) = 1$. On s'intéresse dans cette thèse à l'équation aux dérivées partielles hessienne suivante, posée dans $\mathbb{R}^n$ tout entier :

$$m_\kappa \left[\lambda(D^2 f)\right] = [\psi(x)]^{\frac{1}{\kappa}} \tag{1.1}$$

avec $f = \frac{1}{2}|x|^2 + u$ et $\psi = 1 + \phi$ est une fonction positive $\psi > 0$, les fonctions u et ϕ tendant convenablement vers 0 à l'infini. Ici $\lambda(D^2 f)$ désigne le n-uplet des valeurs propres de la matrice hessienne de f par rapport à la *métrique euclidienne standard* de $\mathbb{R}^n$.

Nous supposerons toujours u telle que $\lambda(D^2 f)$ appartienne au cône de positivité de m_κ (voir Chapitre 2) et nous dirons alors que u est κ-admissible ; nous verrons que cette condition est garante de *l'ellipticité* de l'équation (1.1) ainsi posée.

Pour $\kappa = 1$, cette équation s'écrit simplement

$$\frac{1}{n}\Delta u = \phi$$

et peut être résolue trivialement dans les espaces Höldériens à poids que nous utilisons car le Laplacien Δ vérifie un théorème d'isomorphisme entre ces espaces (voir plus loin).

Pour $\kappa = n$, il s'agit de l'équation de Monge-Ampère réelle :

$$\left[det\left(\delta_{ij} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = (1 + \phi)^{\frac{1}{n}} > 0$$

traitée, dans les espaces à poids susdits, dans [5].

Notre contribution concerne le cas $1 < \kappa < n$. Dans ce cas, le problème de Dirichlet posé dans un ouvert borné (de géométrie convenable) a été traité pour notre équation dans l'article remarquable [4].

Notre approche n'est pas d'utiliser [4] pour une suite, par exemple, de boules concentriques B_i de rayon R_i tendant vers l'infini (exhaustion). Nous travaillons plutôt directement sur tout $\mathbb{R}^n$ avec une méthode de continuité, dans nos espaces à poids, précisant ainsi d'emblée le comportement à l'infini des solutions.

Notre choix de f à l'infini permet à l'opérateur différentiel non-linéaire

$$\mathcal{M}_\kappa[u] := u \mapsto m_\kappa[\lambda(I + D^2 u)]$$

qui en résulte d'être *invariant par les rotations* de $\mathbb{R}^n$, comme le seraient, mais avec seulement $\kappa = 1$ et $\kappa = n$, les opérateurs résultants d'un choix plus général : $D^2 f \to a_{ij}$ à l'infini, avec une matrice symétrique a_{ij} dont le n-uplet de valeurs propres $\lambda(a)$ vérifierait : $m_\kappa[\lambda(a)] = 1$ avec $\forall\ i = 1, \ldots, \kappa,\ \ \sigma_i[\lambda(a)] > 0$. Cette invariance sera utilisée pour construire des sur et sous solutions *radiales* de l'équation (1.1) en vue de l'estimation *a priori* C^0 pondérée.

Notre principal résultat est le suivant :

Théorème *Pour toute fonction $\phi \in C^{0,\alpha}_{p+2}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\psi := 1 + \phi > 0$, tous $n > 2$ et $p \in (0, n-2)$, il existe une unique solution $u \in C^{2,\alpha}_p(\mathbb{R}^n)$ κ-admissible de l'équation (1.1).*

Remarque *Soit u une telle solution de l'équation (1.1) et $k \in \mathbb{N}$. Alors, si $\phi \in C^{k,\alpha}_{p+2}(\mathbb{R}^n)$, $u \in C^{k+2,\alpha}_p(\mathbb{R}^n)$.*

Décrivons à présent le plan de la thèse.

Dans la première section du Chapitre 2 nous rappelons quelques propriétés algébriques des moyennes symétriques élémentaires, m_κ, (cône de positivité Γ_κ, concavité et ellipticité sur Γ_κ). Dans la deuxième section nous montrons que la concavité et l'ellipticité des fonction m_κ donnent la concavité et l'ellipticité des fonctions correspondantes des valeurs propres d'une matrice symétrique, A. Dans la troisième section nous considérons l'opérateur différentiel totalement non linéaire du seconde ordre $\mathcal{M}_\kappa[u]$, concave par rapport à D^2u, obtenu en remplaçant la matrice symétrique A précédente par la matrice hessienne $A = D^2 f$ de la fonction $f = \frac{1}{2}|x|^2 + u$. Nous donnons la définition d'une fonction κ-admissible, u, et nous démontrons que l'opérateur $\mathcal{M}_\kappa[u]$ et son linéarisé $d\mathcal{M}_\kappa[u]$ sont elliptiques, ainsi que $\tilde{\mathcal{F}}_\kappa$ et avec $d\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[u]$ de forme *divergentielle*, où $\tilde{\mathcal{F}}_\kappa := (M_\kappa)^\kappa$.

Dans la première section du Chapitre 3, nous rappelons quelques propriétés des opérateurs linéaires elliptiques d'ordre deux. Dans la deuxième section nous démontrons l'unicité d'une solution κ-admisible de l'équation (1.1) en utilisant le *Principe de comparaison* dans l'ensemble des fonctions $C^2(\mathbb{R}^n)$ qui s'annulent à l'infini.

Dans le Chapitre 4, la première section contient la définition de l'espace de Hölder à poids noté $C_p^{k,\alpha}$, et la preuve d'un lemme qui en donne une caractérisation analytique (par scaling). Dans la deuxième section nous rappelons des relations entre les espaces $C_p^{k,\alpha}$, et nous montrons un lemme d'interpolation pour l'utiliser dans la troisième section qui contient l'estimation *a priori* de type Schauder. Dans la dernière section nous montrons qu'un opérateur linéaire L qui vérifie les propriétés du linéarisé $d\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[u]$ ci-dessus est un isomorphisme entre $C_p^{k+2,\alpha}$ et $C_{p+2}^{k,\alpha}$.

Dans le Chapitre 5, nous présentons d'abord la méthode de continuité linéaire, et dans la seconde section nous utilisons la méthode de continuité non linéaire pour montrer l'existence d'une solution κ-admissible. Cette méthode nous montre que la résolution de notre problème est réduite à son inversibilité locale et à construire une estimation *a priori* des solutions u_t dans l'espace $C_p^{2,\alpha}$.

Dans le Chapitre 6 nous montrons que pour tout $u \in \Omega_p^{k+2,\alpha}$, l'ouvert des fonctions κ-admissibles de $C_p^{k+2,\alpha}$, le linéarisé $d\mathcal{N}_\kappa[u]$ est un isomorphisme de $C_p^{k+2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{k,\alpha}$ avec $\mathcal{N}_\kappa := \log(\tilde{\mathcal{F}}_\kappa) = \kappa \log(\mathcal{M}_\kappa)$. Par un théorème d'inversion locale et l'injectivité de $\mathcal{N}_\kappa$ sur $\Omega_p^{k+2,\alpha}$ nous obtenons que $\mathcal{N}_\kappa$ est un difféomorphisme de $\Omega_p^{k+2,\alpha}$ sur son image. Celle-ci va être tout l'espace $C_{p+2}^{k,\alpha}$, et $\mathcal{N}_\kappa$ surjective, après la résolution de l'équation (1.1).

Dans le Chapitre 7 nous montrons d'abord l'existence d'une solution radiale unique quand la donnée ϕ est radiale. Dans les sections suivantes, nous en déduisons l'estimation d'ordre zéro pondérée, nous construisons les estimations d'ordre un et deux sans poids, et nous finissons par l'estimation non linéaire pondérée. Celle-ci permet de conclure et de résoudre, d'après la méthode de continuité vue au Chapitre 5, l'équation (1.1).

Enfin nous incluons un Chapitre 8 pour y présenter une théorie parallèle pour les équations complexes analogues qui s'écrivent $m_\kappa[(\partial\bar{\partial}f)] = [\psi(z,\bar{z})]^{\frac{1}{\kappa}}$ sur tout $\mathbb{C}^n$.

Chapitre 2

Rappels sur les fonctions κ-admissibles

2.1 Propriétés algébriques des fonctions symétriques élémentaires

Définition 2.1 *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, on dit que Γ est un cône si $\forall \alpha > 0, \forall x \in \Gamma, \alpha x \in \Gamma$. On dit que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est un cône convexe si Γ est un ensemble convexe et cône.*

Lemme 2.1 *$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ cône convexe si et seulement si Γ est stable par la multiplication par un scalaire positif et par l'addition, c'est-à-dire :*

$$\forall\ x, y \in \Gamma, \forall\ \alpha > 0, \alpha x \in \Gamma \text{ et } x + y \in \Gamma$$

Preuve : Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ cône convexe alors $z = \frac{1}{2}(x+y) \in \Gamma$ et $x + y = 2z \in \Gamma$. Réciproquement, si Γ stable par l'addition et si $0 < \alpha < 1$ alors $(1-\alpha)x$ et $\alpha y \in \Gamma$, on a $(1-\alpha)x + \alpha y \in \Gamma$ d'où le résultat.

Définition 2.2 *Les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_\kappa(\lambda)$ pour $1 \leq \kappa \leq n$ sont des fonctions à n variables définient par*

$$\sigma_\kappa(\lambda) = \sigma_\kappa(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_\kappa \leq n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_\kappa}$$

Par définition le cône de positivité de σ_κ est la composante connexe contenant $(1, \ldots, 1)$ de $\{\lambda \in \mathbb{R}^n \textit{ tel que } \sigma_\kappa(\lambda) > 0\}$ on note ce cône Γ_κ.

Le cône de positivité Γ_κ admet les caractérisations suivantes :

Théorème 2.1 $\Gamma_\kappa = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \sigma_{\mathrm{i}}(\lambda) > 0 \ \forall\ \mathrm{i} = 1 \ldots \kappa\}$

$= \{\lambda \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \forall \eta \in (\mathrm{R}^+)^{\mathrm{n}} - \{0\}\ \sigma_\kappa(\lambda+\eta) > \sigma_\kappa(\lambda) > 0\}$

$= \{\lambda \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \forall\ \mathrm{j} \in \{0, 1, \ldots, \kappa\},\ \forall\ (\mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_{\mathrm{j}}) \text{ vrifiant}$
$1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n,\ \frac{\partial^j \sigma_\kappa}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_j}} > 0\}$

Pour la démonstration voir [2].

Remarque 2.1 $\forall\ \lambda \in \Gamma_\kappa, \forall\ i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_i}(\lambda) > 0.$$

Γ_κ est une cône convexe de sommet 0. De plus, on a les inclusions :

$$\Gamma^+ = \Gamma_n \subset \Gamma_{n-1} \subset \ldots \subset \Gamma_1,$$

où Γ^+ désigne $\{\lambda \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées strictement positives$\}$.

Soit M l'unique forme κ-linéaire symétrique engendrant σ_κ (c'est-à-dire telle que $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}^n\ M(\lambda, \ldots, \lambda) = \sigma_\kappa(\lambda)$).

$\forall\ \lambda^1, \ldots, \lambda^\kappa$ de coordonnées $(\lambda^1_{i_1})_{1 \leq i_1 \leq n}, \ldots, (\lambda^\kappa_{i_\kappa})_{1 \leq i_\kappa \leq n}$, M s'exprime de la façon suivante :

$$M(\lambda^1, \ldots, \lambda^\kappa) = \frac{1}{\kappa!} \sum_{i_1, \ldots, i_\kappa} \frac{\partial^\kappa \sigma_\kappa}{\partial \lambda_{i_1} \ldots \partial \lambda_{i_\kappa}} \lambda^1_{i_1} \ldots \lambda^\kappa_{i_\kappa}.$$

Théorème 2.2 *Inégalité de Gårding :* $\forall\ \lambda^1, \ldots, \lambda^\kappa \in\ \Gamma_\kappa$,

$$M(\lambda^1, \ldots, \lambda^\kappa) \geq \sigma_\kappa(\lambda^1)^{\frac{1}{\kappa}} \ldots \sigma_\kappa(\lambda^\kappa)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

pour la démonstration de cette inégalité, nous renvoyons à l'article de L.Gårding [7].

■

Corollaire 2.1 $\sigma_\kappa^{\frac{1}{\kappa}}$ *est concave sur le cône convexe* Γ_κ *:*

$\forall\ \lambda, \mu \in \Gamma_\kappa$,

$$[\lambda, \mu] \subset \Gamma_\kappa,$$

et $\forall\ t \in [0, 1]$,

$$[\sigma_\kappa(t\lambda + (1-t)\mu)]^{\frac{1}{\kappa}} \geq t\ \sigma_\kappa(\lambda)^{\frac{1}{\kappa}} + (1-t)\ \sigma_\kappa(\mu)^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Preuve : Montrons d'abord la concavité de $[\sigma_\kappa]^{\frac{1}{\kappa}}$ sur Γ_κ. Soient $\lambda, \mu \in \Gamma_\kappa$.

En dérivant $M(\lambda, \dots, \lambda) = \sigma_\kappa(\lambda)$ dans la direction de μ,

$$M(\mu, \lambda, \dots, \lambda) = \frac{1}{\kappa}\sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_j}(\lambda).$$

D'après l'inégalité de Gårding, on a donc :

$$\frac{1}{\kappa}\sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_j}(\lambda) \geq \sigma_\kappa(\mu)^{\frac{1}{\kappa}} \sigma_\kappa(\lambda)^{1-\frac{1}{\kappa}}.$$

Or on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_j}\sigma_\kappa(\lambda)^{\frac{1}{\kappa}} = \sigma_\kappa(\lambda)^{\frac{1}{\kappa}} \ et \ \frac{\partial}{\partial \lambda_j}\sigma_\kappa(\lambda)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{1}{\kappa}\sigma_\kappa(\lambda)^{\frac{1}{\kappa}-1}\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\sigma_\kappa(\lambda).$$

d'où

$$\sigma_\kappa(\mu)^{\frac{1}{\kappa}} \leq \sigma_\kappa(\lambda)^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{j=1}^{n}(\mu_j - \lambda_j)\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\sigma_\kappa(\lambda)^{\frac{1}{\kappa}}$$

Cette inégalité équivaut à l'inégalité de concavité, donc $\sigma_\kappa(\lambda)^{\frac{1}{\kappa}}$ est une fonction concave.

$\blacksquare$

Montrons maintenant que Γ_κ est convexe :

Soit $\lambda_0, \lambda_1 \ \in \Gamma_\kappa$, et $\lambda_t = t\lambda_1 + (1-t)\lambda_0$, pour $t \in [0,1]$.

Raisonnement par l'absurde, supposons il existe $t \in (0,1)$ tel que $\lambda_t \notin \Gamma_\kappa$.

Soit $t_0 = \inf\{t \in [0,1] \text{ tel que} \lambda_t \notin \Gamma_\kappa\}$ alors $\lambda_{t_0} \notin \Gamma_\kappa$ car Γ_κ est ouvert.

Nécessairement $\sigma_\kappa(\lambda_{t_0}) = 0$, puisque $\sigma_\kappa(\lambda_{t_0}) \geq 0$ par continuité, et $\sigma_\kappa(\lambda_{t_0}) > 0$ entraînerait que $\lambda_{t_0} \in \Gamma_\kappa$.

D'après l'inégalité de concavité on a :

$$\sigma_\kappa(\lambda_0)^{\frac{1}{\kappa}} \leq \sigma_\kappa(\lambda_{t_0})^{\frac{1}{\kappa}} + \sum_{j=1}^{n}(\lambda_{0j} - \lambda_{t_0 j})\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\sigma_\kappa(\lambda_{t_0})^{\frac{1}{\kappa}}$$

c'est-à-dire

$$0 < \sigma_\kappa(\lambda_0)^{\frac{1}{\kappa}} \leq \sum_{j=1}^{n}(\lambda_{0j} - \lambda_{t_0 j})\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\sigma_\kappa(\lambda_{t_0})^{\frac{1}{\kappa}}.$$

De même,

$$0 < \sigma_\kappa(\lambda_1)^{\frac{1}{\kappa}} \leq \sum_{j=1}^{n}(\lambda_{1j} - \lambda_{t_0 j})\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\sigma_\kappa(\lambda_{t_0})^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Or $\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{0j} - \lambda_{t_0 j})\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\sigma_\kappa(\lambda_{t_0})^{\frac{1}{\kappa}}$ *et* $\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{1j} - \lambda_{t_0 j})\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\sigma_\kappa(\lambda_{t_0})^{\frac{1}{\kappa}}$ sont de signes contraires, car

$$\lambda_{0j} - \lambda_{t_0 j} = -t_0(\lambda_{1j} - \lambda_{0j}),$$

et

$$\lambda_{1j} - \lambda_{t_0 j} = (1 - t_0)(\lambda_{1j} - \lambda_{0j})$$

On obtient donc une contradiction, et Γ_κ est convexe.

■

Remarque 2.2 *:* $\forall\ \lambda \in \Gamma_\kappa$ on a :

$$\left(\frac{\partial^2 (\sigma_\kappa)^{\frac{1}{\kappa}}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}(\lambda)\right)_{ij}$$

est une matrice définie négative.

Définition 2.3 *Soit* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ *; on définit* $m_\kappa(\lambda)$*, pour* $\kappa = \{1, \ldots, n\}$*, par :*

$$m_\kappa(\lambda) = \left[\frac{1}{\binom{n}{\kappa}}\sigma_\kappa(\lambda)\right]^{\dfrac{1}{\kappa}},$$

c'est-à-dire que les m_κ *sont les fonctions symétriques élémentaires homogènes normalisées telles que :* $m_\kappa(1, \ldots, 1) = 1$*,* $m_\kappa(c\lambda) = c m_\kappa(\lambda)$*.*

Inégalités de Mac-Laurin :

Notons, pour $i \in \{1, \ldots, n\}, \tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\binom{n}{\kappa}}$

Sur $\bar{\Gamma}_\kappa = \{\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sigma_i \geq 0\ \forall\ i = 1, \ldots, \kappa\}$, on a :

$$m_1 \geq \ldots \geq m_{\kappa-1} \geq m_\kappa$$

ou encore :

$$\tilde{\sigma}_1 \geq \ldots \geq (\tilde{\sigma}_{\kappa-1})^{\frac{1}{\kappa-1}} \geq (\tilde{\sigma}_\kappa)^{\frac{1}{\kappa}}$$

Preuve : Démontrons ces inégalités dans Γ_κ, le résultat dans $\bar{\Gamma}_\kappa$ en étant alors conséquence de façon évidente. Par convention $\sigma_0 = 1$

Écrivons les inégalité de Newton, valables sur $\mathbb{R}^n$ [9] :
$\forall\ j \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\tilde{\sigma}_{j-1}\tilde{\sigma}_{j+1} \leq \tilde{\sigma}_j^2$$

Multiplions ces inégalité élevées à la puissance j pour j variant de 1 à $i-1$, où $i \in \{2, \dots, \kappa\}$:

$$\prod_{j=1}^{i-1} \left(\tilde{\sigma}_{j-1}(\lambda)\tilde{\sigma}_{j+1}(\lambda)\right)^j \leq \prod_{j=1}^{i-1} \left(\tilde{\sigma}_j^2(\lambda)\right)^j$$

Or, on a l'identité :

$$\prod_{j=0}^{i-2} \left(\tilde{\sigma}_j(\lambda)\right)^{j+1} \prod_{\kappa=2}^{i} \left(\tilde{\sigma}_\kappa(\lambda)\right)^{\kappa-1} = \tilde{\sigma}_1(\lambda)^2\tilde{\sigma}_i(\lambda)^{i-1}\tilde{\sigma}_{i-1}(\lambda)^{i-2}\prod_{j=2}^{i-2} \tilde{\sigma}_j(\lambda)^{2j}$$

En simplifiant l'inégalité ci-dessus, on obtient donc l'inégalié :

$$\tilde{\sigma}_1^2\tilde{\sigma}_i^{i-1}\tilde{\sigma}_{i-1}^{i-2} \leq \tilde{\sigma}_1^2\tilde{\sigma}_{i-1}^{2(i-1)}$$

ou encore

$$\tilde{\sigma}_i^{i-1} \leq \tilde{\sigma}_{i-1}^{i}$$

d'où l'inégalité de Mac-Laurin :

$$\tilde{\sigma}_i^{\frac{1}{i}} \leq \tilde{\sigma}_{i-1}^{\frac{1}{i-1}}$$

■

Remarque 2.3 Si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Gamma_\kappa$, avec $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, alors

$$\frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_1} \leq \dots \leq \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_n}.$$

Preuve : Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Gamma_\kappa$, tel que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.
Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$. On a

$$\frac{\partial \sigma_{\kappa-1}}{\partial \lambda_i} = \lambda_j \frac{\partial^2 \sigma_{\kappa-2}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} + \frac{\partial^2 \sigma_{\kappa-1}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}$$

donc

$$\frac{\partial \sigma_{\kappa-1}}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \sigma_{\kappa-1}}{\partial \lambda_j} = (\lambda_j - \lambda_i)\frac{\partial^2 \sigma_{\kappa-2}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}$$

Si $\kappa = 2$ on obtient $\dfrac{\partial \sigma_{\kappa-1}}{\partial \lambda_i} = \dfrac{\partial \sigma_{\kappa-1}}{\partial \lambda_j}$

Si $\kappa > 2$ et comme $\lambda \in \Gamma_\kappa$, donc $\dfrac{\partial^2 \sigma_{\kappa-2}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} > 0$ (voir le Théorème 2.1).

Donc $\dfrac{\partial \sigma_{\kappa-1}}{\partial \lambda_i} - \dfrac{\partial \sigma_{\kappa-1}}{\partial \lambda_j}$ et $\lambda_j - \lambda_i$ ont même signe, ce qui donne le résultat.

■

2.2 Fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres d'une matrice symétrique

Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\kappa \in \{1, \ldots, n\}$, où $S_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles $n \times n$.

Définition 2.4 *Notons* $F_\kappa(A) = \sum_{|I|=\kappa} A_{II}$*, la somme des mineurs principaux d'ordre* κ *de* A*. On considérera aussi parfois*

$$\tilde{F}_\kappa(A) = \frac{1}{\binom{n}{\kappa}} F_\kappa(A).$$

Une matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$ est dite κ-admissible si $\lambda(A) \in \Gamma_\kappa$, on notera provisoirement $\Gamma_\kappa(S_n(\mathbb{R}))$ l'ouvert des matrices symétrique κ-admissible (voir plus loin Lemme 2.4).

Le cône de positivité de F_κ est la composante connexe contenant I de $\{A \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $F_\kappa(A) > 0\}$. F_κ est invariant par similitude, car $F_\kappa(A) \equiv \sigma_\kappa(\lambda)$, où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est le vecteur formé des valeurs propres de A (ou encore $\tilde{F}_\kappa(A) = \tilde{\sigma}_\kappa(\lambda)$), autrement dit, car $F_\kappa(A)$ n'est autre que le coefficient (au signe près) de λ^κ dans le dévoloppement du polynôme $\det(A - \lambda I)$ caractéristique de la matrice symétrique A.

Anticipant sur le cas où la matrice A sera la hessienne d'une fonction (voir plus loin), il est commode ici de poser la définition suivante :

Définition 2.5 *Une fonction* $f : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^1 *et qui vérifie* $f({}^tA) = f(A)$ *sera dite positivement elliptique en un point* $A_0 \in S_n(\mathbb{R})$ *si la matrice symétrique* $\left(\frac{\partial f}{\partial A_{ij}}(A_0)\right)_{1 \le i,j \le n}$ *est définie positive.*

On dit que f est elliptique sur un ouvert $\Omega \subset S_n(\mathbb{R})$ si elle l'est en tout point de Ω.

Notation 2.1 (symbole de Kronecker) *Pour* $1 \le r \le n$ *et* $1 \le i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_r \le n$*, le symbole de Kronecker* $\varepsilon^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_r}$ *est égal à* 1 *(respectivement,* -1*) si* $i_1, \ldots, i_r$ *sont distincts et* $(j_1, \ldots, j_r)$ *est une permutation paire (respectivement, impaire) de* $(i_1, \ldots, i_r)$*, et il est égal à zéro dans les autres cas.*

Ellipticité et concavité de $F_\kappa(A)^{\frac{1}{\kappa}}$

Lemme 2.2 *Pour toute matrice symétrique* $A \in \Gamma_\kappa(S_n(\mathbb{R}))$*, la fonction*

$$A \in \Gamma_\kappa(S_n(\mathbb{R})) \longrightarrow [F_\kappa(A)]^{\frac{1}{\kappa}}$$

est elliptique et concave.

Preuve : Ellipticité Soit $A \in \Gamma_\kappa(S_n(\mathbb{R}))$, par définition :

$$F_\kappa(A) = \frac{1}{\kappa!} \sum \varepsilon^{i_1 \ldots i_\kappa}_{j_1 \ldots j_\kappa} \; a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_\kappa j_\kappa}$$

et la fonction est invariante par $A \longrightarrow {}^tPAP$ où $P \in O_n(\mathbb{R})$ est une matrice de rotation. Ceci nous permet de supposer, sans restreindre la généralité, que A est une matrice diagonale, d'éléments diagonaux $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Gamma_\kappa$. Pour i et j fixés dans $\{1, \ldots, n\}$, on a alors

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(A) = \frac{1}{\kappa!} \sum \varepsilon^{i_1 \ldots i_\kappa}_{j_1 \ldots j_\kappa} \frac{\partial}{\partial a_{ij}}(a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_\kappa j_\kappa}) = \frac{1}{(\kappa-1)!} \sum \varepsilon^{i_1 \ldots i_{\kappa-1} i}_{j_1 \ldots j_{\kappa-1} j} \; a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_{\kappa-1} j_{\kappa-1}} \tag{2.1}$$

A étant supposée diagonale, on a $\forall r \in \{1, \ldots, \kappa-1\}, a_{i_r j_r} = \delta_{i_r j_r} a_{i_r i_r}$, $\dfrac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(A)$ est donc nul si $i \neq j$.

Si $i = j$ alors les seuls termes non nuls de (2.1) sont quand $(i_1, \ldots, i_\kappa) = (j_1, \ldots, j_\kappa)$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ii}}(A) &= \frac{1}{(\kappa-1)!} \sum_{i \notin \{i_1, \ldots, i_{\kappa-1}\}} a_{i_1 i_1} \ldots a_{i_{\kappa-1} i_{\kappa-1}} \\
&= \frac{1}{(\kappa-1)!} \sum_{i \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{\kappa-1}\}} \lambda_{\alpha_1} \ldots \lambda_{\alpha_{\kappa-1}} = \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(A) = \delta_{ij} \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_i} [\lambda(A)] \,.$$

D'après le théorème 2.1 (et la remarque qui le suit), l'ellipticité de F_κ en A est acquise, donc aussi celle de $[F_\kappa]^{\frac{1}{\kappa}}$.

Concavité :

Reprenons un argument de [4]. Soit $A \in \Gamma_\kappa(S_n(\mathbb{R}))$ de valeurs propres $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$. Soient $w_1, \ldots, w_n$ les vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$.

D'après le principe du *min-max* on a :

$$\lambda_1(A) = \underset{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}}{min} \frac{(Ax, x)}{|x|^2} = \underset{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x|=1}}{min} (Ax, x),$$

$\forall\ x$ fixé, $|x| = 1$, l'application $A \longmapsto (Ax, x)$ est linéaire, donc $\lambda_1(A)$ est un *min* d'applications linéaires, donc, $\lambda_1(A)$ est une fonction concave de A. Plus généralement, nous allons construire à partir de A l'opérateur auto-adjoint

$$A^{[k]} = \sum_{j=1}^{k} I \otimes \ldots \otimes \underset{j}{A} \otimes \ldots \otimes I$$

En appliquant $A^{[k]}$ au produit extérieur de $w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}$, avec $w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}$ les vecteurs propres associés respectivement à la valeurs propres $\lambda_{i_1}(A), \ldots, \lambda_{i_k}(A), 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, on obtient :

$$\begin{aligned} A^{[k]} w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_k} &= \sum_{j=1}^{k} w_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{w}_{i_j} \wedge A w_{i_j} \wedge \ldots \wedge w_{i_k} \\ &= \sum_{j=1}^{k} w_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{w}_{i_j} \wedge \lambda_{i_j}(A) w_{i_j} \wedge \ldots \wedge w_{i_k} \\ &= \left(\lambda_{i_1}(A) + \ldots + \lambda_{i_k}(A)\right) w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_k} \end{aligned}$$

Donc les $\lambda_{i_1}(A)+\ldots+\lambda_{i_k}(A)$ sont les valeurs propres de $A^{[k]}$ pour $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.

Encore d'après le principe du *min-max* on obtient :

$$(\lambda_1(A) + \ldots + \lambda_k(A)) = min \frac{(A^{[k]} w_1 \wedge \ldots \wedge w_k, w_1 \wedge \ldots \wedge w_k)}{|w_1 \wedge \ldots \wedge w_k|^2}.$$

D'où $\lambda_1(A) + \ldots + \lambda_k(A)$ est fonction concave de A.

Par ailleurs $[\sigma_\kappa(\lambda)]^{\frac{1}{\kappa}}$ est une fonction concave sur Γ_κ donc

$$[\sigma_\kappa(\lambda)]^{\frac{1}{\kappa}} = \underset{\mu}{min} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mu_j \lambda_j + \mu_0 \right\} \quad [3](Th\ I.10)$$

avec $\mu_j \geq 0,\ j \geq 1$ car $[\sigma_\kappa(\lambda)]^{\frac{1}{\kappa}}$ est elliptique sur Γ_κ. Utilisons ici le :

Lemme 2.3 *[14] Pour toutes matrices $B, C \in S_n(\mathbb{R})$ avec des valeurs propres respectivement $\beta_1 \leq \ldots \leq \beta_n$, $\gamma_1 \geq \ldots \geq \gamma_n$ on a :*

$$tr(BC) \geq \sum_{j=1}^{n} \beta_j \gamma_j$$

Utilisant ce lemme avec $A = B$ et C diagonale, nous en déduisons qu'on peut prendre $[\sigma_\kappa(\lambda)]^{\frac{1}{\kappa}} = \underset{\mu}{min} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mu_j \lambda_j + \mu_0 \right\}$ avec μ_j décroissant, $\ j \geq 1$.

Or on a $\sum \mu_j \lambda_j + \mu_0 = \sum_1^{n-1} (\mu_j - \mu_{j+1})(\lambda_1 + \ldots + \lambda_j) + \mu_n(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) + \mu_0$,

appliquant cette écriture à $\lambda = \lambda(A)$ et comme les sommes $\lambda_1(A) + \ldots + \lambda_j(A)$ sont fonctions concaves de A, on voit que $[F_\kappa(A)]^{\frac{1}{\kappa}} = [\sigma_\kappa(\lambda(A))]^{\frac{1}{\kappa}}$ est bien une fonction concave de A.

■

Lemme 2.4 $\Upsilon_\kappa = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \ \textit{tel que}\ F_i(A) > 0 \ \forall\ i = 1 \ldots \kappa\}$ (1)

$= \{PDiag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}, P \in O_n(\mathbb{R}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Gamma_\kappa\}$ (2)

$= \{A \in S_n(\mathbb{R}) \ \textit{tel que}\ \forall B \in S_n^{+*}(\mathbb{R}) F_\kappa(A + B) > F_\kappa(A) > 0\}$(3)

Preuve : (2) $\subset$ (1) est évidente

(1) $\subset$ (2).

On va démontrer que (2) est une partie à la fois ouverte et fermée de $\{A \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $F_\kappa(A) > 0\}$, contenant I. Elle contiendra alors aussi (1).

Évidemment $I \in$ (2) car $I = PDiag(1, \ldots, 1)P^{-1}$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\forall\ i \in \{1, \ldots, \kappa\}$ $\sigma_i(1, \ldots, 1) > 0$.

Soit $\mathbb{R}^n/\Sigma_n$, l'espace quotient de $\mathbb{R}^n$ par l'action naturelle du groupe symétrique Σ_n et désignons par $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ la classe dans ce quotient d'un élément $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$de $\mathbb{R}^n$.

l'application de $S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n/\Sigma_n$

$$A \longmapsto [\lambda_1, \ldots, \lambda_n], \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ valeurs propres de } A,$$

est continue.

Γ_κ étant un ouvert saturé de $\mathbb{R}^n$, $[\Gamma_\kappa]$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n/\Sigma_n$. Son image réciproque, incluse dans $\{A \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $F_\kappa(A) > 0\}$, qui est exactement la partie considérée, est donc un ouvert de $\{A \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $F_\kappa(A) > 0\}$.

Pour montrer que c'est aussi un fermé de $\{A \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $F_\kappa(A) > 0\}$, il suffit de remarquer qu'un élément B de son adhérence dans $\{A \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $F_\kappa(A) > 0\}$ est tel que , si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ désigne un vecteur formé des valeurs propres de B, $\sigma_i(\lambda) \geq 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, \kappa\}$. Comme on a $\sigma_\kappa(\lambda) > 0$, d'aprés les inégalités de Mac-laurin $\lambda \in \Gamma_\kappa$.

Donc $\{PDiag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}, P \in O_n(\mathbb{R}), (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Gamma_\kappa\}$ est une partie à la fois ouverte et fermée de $\{A \in S_n(\mathbb{R}) \textit{tel que} F_\kappa(A) > 0\}$.

Comme $\Gamma_\kappa = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \text{ } tel \text{ } que \text{ } \sigma_i(\lambda) > 0 \; \forall \; i = 1 \ldots \kappa\}$, on obtient :

$$\Upsilon_\kappa = \{A \in S_n(\mathbb{R}) \text{ } tel \text{ } que \text{ } F_i(A) > 0 \; \forall \; i = 1 \ldots \kappa\}.$$

Montrons l'inclusion (3) $\subset$ (2) **:**

Soit $A \in (3)$, alors il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, et $P \in O_n(\mathbb{R})$ tels que

$$A = PDiag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}.$$

Puisque $A \in (3)$, donc $\forall \eta \in (\mathbb{R}^+)^n, \eta \neq 0$,

$$F_\kappa(A + PDiag(\eta_1, \ldots, \eta_n)P^{-1}) > F_\kappa(A) > 0$$

c'est-à-dire $\sigma_\kappa(\lambda + \eta) > \sigma_\kappa(\lambda) > 0$. D'après le Théorème 2.1 on déduit $\lambda \in \Gamma_\kappa$, d'où $A \in (2)$.

Inclusion inverse :

Si $A \in (2)$ et $B \in S_n^{+*}(\mathbb{R})$, comme B est alors aussi dans l'adhérence de (2), la concavité de $[F_\kappa]^{\frac{1}{\kappa}}$ (d'après le Lemme 2.2) conduit à l'inégalité :

$$[F_\kappa(A + B)]^{\frac{1}{\kappa}} \geq [F_\kappa(A)]^{\frac{1}{\kappa}} + [F_\kappa(B)]^{\frac{1}{\kappa}}.$$

En élevant cette inégalité à la puissance κ, on obtient :

$$\begin{aligned} F_\kappa(A + B) &\geq F_\kappa(A) + F_\kappa(B) \\ &\geq F_\kappa(A). \end{aligned}$$

Supposons que cette inégalité soit une égalité. On peut supposer que B est une matrice diagonale.

B étant supposée non nulle, il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que pour tout ε assez petit,

$$(A + \varepsilon E_{ii}) \in \Upsilon_\kappa, \quad et \quad B \geq \varepsilon E_{ii}$$

où E_{ii} est la matrice ayant un seul coefficient non nul, 1, d'indice (i, i).

On obtient donc

$$F_\kappa(A + \varepsilon E_{ii}) = F_\kappa(A)$$

pour ε assez petit, on a

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ii}}(A) = 0.$$

On obtient une impossibilité. (voir l'ellipticité de F_κ).

■

2.3 Fonctions κ-admissibles

On note $v_{i_1\ldots i_k} = \frac{\partial^k v}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}$ la dérivée partielle, $|x|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$ et x_i la i-éme coordonnée de x.

Définition 2.6 *Une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ est dite κ-admissibles si $a_u(x) := I + D^2u(x) \in \Upsilon_\kappa$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Quand le contexte est clair, on utilisera l'abbréviation commode :*

$$a_{ij} = (a_u)_{ij} = \delta_{ij} + u_{ij}.$$

Définition 2.7 *Soit $\mathcal{F}_\kappa$ l'opérateur différentiel défini sur $C^2(\mathbb{R}^n)$, par :*

$$u \mapsto \mathcal{F}_\kappa[u] := F_\kappa(a_u).$$

On notera aussi parfois, plus loin : $\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[u] = \tilde{F}_\kappa(a_u)$

Corollaire 2.2 *$\forall\, u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ κ-admissible, l'opérateur différentiel $\mathcal{F}_\kappa[u]$ est elliptique.*

Preuve : Soit $u \in C^2 \kappa$-admissibles et $v \in C^2$, on a :

$$d\mathcal{F}_\kappa[u](v) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_\kappa[u+tv]|_{t=0} \equiv \sum \frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u)v_{ij}$$

et le corollaire suit du Lemme 2.2.

■

Rappelons que :

$$\mathcal{F}_\kappa[u] = F_\kappa(a_u) = \frac{1}{\kappa!}\sum \varepsilon^{i_1\ldots i_\kappa}_{j_1\ldots j_\kappa}\; a_{i_1 j_1}\ldots a_{i_\kappa j_\kappa}$$

Soit :

$$C_{\kappa-1}(D^2u)^i_j = \frac{1}{(\kappa-1)!}\sum \varepsilon^{i_1\ldots i_{\kappa-1}i}_{j_1\ldots j_{\kappa-1}j}\; a_{i_1 j_1}\ldots a_{i_{\kappa-1}j_{\kappa-1}}$$

alors d'après l'équation (2.1) on a :

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u) = C_{\kappa-1}(D^2u)^i_j.$$

Proposition 2.1 *$Trace[C_{\kappa-1}(D^2u)a_u] = \kappa F_\kappa(a_u)$*

$Trace[C_{\kappa-1}(D^2u)a_u] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C^i_j a_{ij} = \sum a_{ij}\frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u) = \kappa F_\kappa(a_u)$ car la fonction $F_\kappa(a_u)$ est homogène d'ordre κ en a_u.

Proposition 2.2 $\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[C_{\kappa-1}(D^2u)^i_j\right] \equiv 0 \quad (j = 1, \dots, n)$

Preuve :

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left[C_{\kappa-1}(D^2u)^i_j\right] = \frac{1}{(\kappa-1)!}\sum_i \sum \varepsilon^{i_1 \dots i_{\kappa-1} i}_{j_1 \dots j_{\kappa-1} j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i_1 j_1}\dots a_{i_{\kappa-1} j_{\kappa-1}}\right)$$

Mais pour tout l on a : $\dfrac{\partial a_{i_l j_l}}{\partial x_i} = u_{i i_l j_l}$ est symétrique en $i_l i$; tandis que le symbole de Kronecker est antisymétrique en $i_l i$. On obtient donc zéro.

Corollaire 2.3 *Le linéarisé $d\mathcal{F}_\kappa[u]$ de $\mathcal{F}_\kappa$ en u est une divergence.*

Preuve :

$$d\mathcal{F}_\kappa[u](v) = \frac{d}{dt}\mathcal{F}_\kappa[u+tv]\Big|_{t=0} = \frac{1}{(\kappa-1)!}\sum \varepsilon^{i_1 \dots i_\kappa}_{j_1 \dots j_\kappa}\, a_{i_1 j_1}\dots a_{i_{\kappa-1} j_{\kappa-1}} v_{i_\kappa j_\kappa}$$

$= C_{\kappa-1}(D^2u)^i_j v_{ij}$. D'après le Proposition 2.2, on peut encore écrire :

$$d\mathcal{F}_\kappa[u](v) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j C_{\kappa-1}(D^2u)^i_j v_j\right) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u)\partial_j v\right)$$

■

Remarque 2.4 En un point x où (D^2u) est diagonale, on a :

$$\frac{\partial F_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u)(x) = \delta_{ij}\frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_i}\left[\lambda(a_u(x)\right] \quad \text{voir Lemme [2.2]}$$

Donc l'ellipticité de $d\mathcal{F}_\kappa[u]$, avec u κ-admissibles, peut être lue en chaque point x (après rotation qui diagonalise $D^2u(x)$) sur les

$$C_{\kappa-1}\left(D^2u(x)\right)^i_i \equiv \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_i}\left[\lambda(a_u(x)\right] > 0$$

au point x pour u fixée, on aura $0 < \lambda < \Lambda$ t.q.

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{ij} C_{\kappa-1}\left(D^2u(x)\right)^i_j \xi^i \xi^j \le \Lambda|\xi|^2$$

■

Chapitre 3

Principe de comparaison

3.1 Opérateur linéaire elliptique d'ordre deux

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 de la forme suivante :

$$\mathcal{L} = a^{ij}(x)\partial_{ij}, \quad a^{ij} = a^{ji},\ i,j = 1,2,\ldots,n.$$

avec $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$ et $\partial_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, où l' on utilise la convention de sommation (ici de 1 à n) des indices muets répétés, c'est-à-dire $\mathcal{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\partial_{ij}$.

On dit que $\mathcal{L}$ est elliptique au point x si la matrice $[a_{ij}(x)]$ est définie positive, ou encore, si $\lambda(x), \Lambda(x)$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeurs propres de $[a^{ij}(x)]$, alors,

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2$$

pour tout $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. On dit que $\mathcal{L}$ est elliptique dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si $\mathcal{L}$ est elliptique pour tout point x dans Ω. Si de plus Λ/λ est borné dans Ω alors on dit que $\mathcal{L}$ est uniformément elliptique dans Ω.

On prend les transformations de coordonnées suivantes :

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} c^{ij} x_j, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Définition 3.1 *On dit que cette transformation est une rotation si et seulement si la matrice $C = [c^{ij}]$ est orthogonale.*

Le résultat classique suivant montre que l'ellipticité de l'opérateur n'est pas affectée par la rotation : il conserve les mêmes fonctions $\lambda(x)$ et $\Lambda(x)$.

Théorème 3.1 *Supposons que l'opérateur*

$$\mathcal{L} = a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \quad (1)$$

soit elliptique. Alors après une rotation, l'opérateur $\mathcal{L}$ reste elliptique et prend la forme suivant :

$$\mathcal{L} = b^{kl}\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} \quad (2)$$

avec

$$b^{kl} = a^{ij}c^{ki}c^{lj}, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Preuve : On a $\partial y_i/\partial x_j = c_{ij}$, en appliquant cette égalité à $\mathcal{L}$, on obtient :

$$a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = a^{ij}(x)c^{ki}(x)c^{lj}(x)\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}.$$

Soit $B = b^{kl}$, soit $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$b^{kl}(x)\xi_k\xi_l = a^{ij}(x)c^{ki}(x)\xi_k c^{lj}(x)\xi_l$$

Soit

$$\eta_i = c^{ki}\xi_k,$$

on obtient

$$b^{kl}(x)\xi_k\xi_l = a^{ij}\eta_i\eta_j.$$

Par l'ellipticité de la forme (1) et l'orthogonalité de la matrice C on obtient :

$$b^{kl}(x)\xi_k\xi_l \geq \lambda(x)|\eta|^2 \equiv \lambda(x)|\xi|^2.$$

De même :

$$b^{kl}(x)\xi_k\xi_l \leq \Lambda(x)|\eta|^2 \equiv \Lambda(x)|\xi|^2$$

Remarque 3.1

Nous constatons que, par rotation, non seulement l'ellipticité est préservée, mais aussi que les quantités $\lambda(x), \Lambda(x)$ sont inchangées.

Si un opérateur est uniformément elliptique, alors l'opérateur le restera après une rotation.

Définition 3.2 *Soit*

$$L = a^{ij}(x)\partial_{ij} + b^i(x)\partial_i + c(x)$$

un opérateur differentiel du seconde ordre. On dit que L est elliptique au point x si et seulement si

$$\mathcal{L} = a^{ij}(x)\partial_{ij}$$

est elliptique en x. Il est uniformément elliptique dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *si* $\mathcal{L}$ *l'est dans* Ω

Définition 3.3 *Un opérateur différentiel scalaire non linéaire du second ordre F est elliptique en une fonction u, au point* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, si* L_u *est un opérateur différentiel linéaire elliptique du second ordre en* x_0 *où :*

$$L_u(v) = \frac{d}{dt}F(u+tv)|_{t=0}.$$

L'opérateur F est dit elliptique sur ouvert $U \subset C^2(\Omega)$ *au point* $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$*, si pour tout* $u \in U$*,* L_u *est elliptique au point* x_0*. Si l'ellipticité a lieu* $\forall\ x_0 \in \Omega$*, on parlera d'ellipticité de F sur U sans préciser en quel point.*

Pour nous l'ouvert U sera l'ensemble des fonctions κ-admissibles (voir Chapitre 6).

3.2 Principe de maximum dans $\zeta_0^2(\mathbb{R}^n)$

On commence par la définition de l'ensemble

$$\zeta_0^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^2(\mathbb{R}^n),\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \right\}$$

Théorème 3.2 *Soit* $u \in \zeta_0^2(\mathbb{R}^n)$ *et*

$$L = a^{ij}(x)\partial_{ij} + b^i(x)\partial_i$$

un opérateur elliptique dans $\mathbb{R}^n$*,* $a^{ij}(x), b^i(x)$ *continue, tel que :*

$$Lu \geq 0 \ (resp\ Lu \leq 0) \ dans\ \mathbb{R}^n$$

alors :

$$u < 0 \ ou\ u \equiv 0 \ (resp\ u > 0 \ ou\ u \equiv 0)$$

Preuve : Soit $B_R = B(0,R)$ la boule de centre 0 et de rayon R on a :

$$Lu \geq 0 \ (Lu \leq 0) \text{ et } L \text{ est elliptique dans } B_R,$$

donc d'après le Principe du Maximum [8] ou [15] on obtient :

$$\underset{B_R}{max}(u) = \underset{\partial B_R}{max}(u) = M_R \ (\underset{B_R}{min}(u) = \underset{\partial B_R}{min}(u) = m_R).$$

Ensuite, R varie, et comme $u \in \zeta_0^2(\mathbb{R}^n)$ donc $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$, alors,

$\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ R$ tel que $x_0 \in B_R$, lorsque $R \to \infty$ on a

$u/_{\partial B_R} < \varepsilon \Rightarrow u(x_0) < \varepsilon \Rightarrow u(x_0) \leq 0$ et ceci vrai $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$, alors $u \leq 0$ *dans* $\mathbb{R}^n$.

Si $u(x_0) = 0$, donc u admet un maximum local en x_0 donc d'après le Principe du Maximum $u \equiv 0$ dans B_R. Comme $\mathbb{R}^n$ est connexe alors $u \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^n$.

Lemme 3.1 (Principe de comparaison) *Soient $u, v \in \zeta_0^2(\mathbb{R}^n)$ κ-admissibles telles que*

$$\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)] \leq \tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_v)] \ dans\ \mathbb{R}^n.$$

Alors

$$u \geq v \ dans\ \mathbb{R}^n$$

Preuve : Soit $w = v - u$, posons $M = max(w)$. Si $M \leq 0$, le lemme est démontré. Raisonnons par l'absurde, et supposons $M > 0$. Comme w s'annule à l'infini, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$w(x_0) = M,\ dw(x_0) = 0 \ et\ D^2w(x_0) \leq 0$$

Soit E_{x_0} la composante connexe du fermé $\{x \in \mathbb{R}^n, w(x) = M\}$ qui contient le point x_0 ; on a E_{x_0} non vide et fermée.

On a $D^2w(x_0) = 0$ car sinon, comme $D^2u(x_0) = -D^2w(x_0) + D^2v(x_0)$ on aurait :

$$\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda a_u(x_0)] > \tilde{\sigma}_\kappa[\lambda a_v(x_0)]$$

contredisant l'hypothèse.
Comme $D^2(w(x_0)) = 0$ alors $D^2(u(x_0)) = D^2(v(x_0))$. Soit $w_t = tv + (1-t)u$ on a $D^2(w_t(x_0)) = D^2(u(x_0)) = D^2(v(x_0))$, donc il existe un voisinage V_{x_0} contenant x_0 sur lequel w_t est κ-admissible $\forall\ t \in [0,1]$. Posons :

$$L[w] = \tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_v)] - \tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)] = \int_0^1 \frac{d}{dt}\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[w_t]dt = \left(\int_0^1 d\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[w_t]dt\right)(v-u)$$

où

$$\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[w] = \tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_w)].$$

Dans V_{x_0} on a :

$L[w] \geq 0$ est elliptique car w_t est κ-admissibles sur V_{x_0} et w admet un maximum local en x_0, donc d'après le Principe du Maximum on obtient $w = cte = M$ sur V_{x_0}. Ainsi, on voit que $E_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ est ouverte, d'où par connexité de $\mathbb{R}^n$, on a $E_{x_0} = \mathbb{R}^n$.

Mais comme w s'annule à l'infini, cela implique $M = 0$ et contredit notre hypothèse $M > 0$. Conclusion $M \leq 0$ ou encore : $u \geq v$ dans $\mathbb{R}^n$.

$\blacksquare$

Corollaire 3.1 *Soient $u, v \in \zeta_0^2(\mathbb{R}^n)\kappa$-admissibles telles que $\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)] = \tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_v)]$ dans $\mathbb{R}^n$ alors $u = v$ dans $\mathbb{R}^n$.*

Chapitre 4

Rappels sur les espaces de Hölder à poids

4.1 Définition des espaces de Hölder à poids

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ connexe, $\sigma(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$ et $p \in \mathbb{R}$.

Définition 4.1 *On désigne par $C^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^k sur Ω, dont les derivées $D^i u, 0 \leq i \leq k$ sont bornées. On munit $C^k(\Omega)$ de la norme :*

$$\|u\|_{C^k(\Omega)} = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x \in \Omega} |D^i u(x)|$$

Définition 4.2 *$C^{k,\alpha}(\Omega)$ est le sous-ensemble de $C^k(\Omega)$ des fonctions pour lesquelles la norme suivante est définie et finie :*

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{C^k(\Omega)} + \sup_{\substack{x,x' \in \Omega \\ x \neq x'}} \frac{|D^k u(x) - D^k u(x')|}{|x - x'|^\alpha}.$$

Pour chaque réel $p \geq 0$, on désigne par :

$$M_{p,i}(u) := \sup_{x \in \Omega} \left\{ \sigma(x)^{p+i} |D^i u(x)| \right\},$$

et :

$$M_{p,i+\alpha}(u) := \sup_{\substack{x,x' \in \Omega \\ x \neq x'}} \left\{ min \left(\sigma(x)^{p+i+\alpha}, \sigma(x')^{p+i+\alpha} \right) \frac{|D^i u(x) - D^i u(x')|}{|x - x'|^\alpha} \right\}.$$

Définition 4.3 $C_p^k(\Omega)$ *est le sous-ensemble des fonctions de* $C^k(\Omega)$ *pour lesquelles la norme suivante est définie et finie :*

$$\|u\|_{C_p^k(\Omega)} = \sum_{i=0}^{k} M_{p,i}(u)$$

Définition 4.4 $C_p^{k,\alpha}(\Omega)$ *est le sous-ensemble de* $C^{k,\alpha}(\Omega)$ *des fonctions pour lesquelles la norme suivante est définie et finie :*

$$\|u\|_{C_p^{k,\alpha}(\Omega)} = \|u\|_{C_p^k(\Omega)} + M_{p,k+\alpha}(u)$$

$C_p^k(\mathbb{R}^n)$ *et* $C_p^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ avec les normes $\|.\|_{C_p^k(\mathbb{R}^n)}$ et $\|.\|_{C_p^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)}$ sont des espaces de Banach. On désignera simplement par C_p^k et $C_p^{k,\alpha}$ ces espaces.

Lemme 4.1 *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *fixé, soit* $X = \dfrac{x - x_0}{\sigma(x_0)}$ *et soit* $0 < \rho < 1$ *on définit les boules :*

$B_\rho = \{X \in \mathbb{R}^n, |X| \leq \rho\}$ *et* $B_\rho^{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n, |X(x)| \leq \rho\} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n, |x - x_0| \leq \rho\sigma(x_0)\}$.

$\forall\ u \in C_p^{k,\alpha}$, *associons à* u *la fonction :*

$$X \in B_\rho \longmapsto u_{x_0}(X) = [\sigma(x_0)]^p u(x) \qquad \text{où } x \text{ est défini par } X(x) = X.$$

La norme $\sup\limits_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|u_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)}$ *est équivalente à la norme* $\|u\|_{C_p^{k,\alpha}}$

i.e. $\exists\ 0 < c_\rho \leq C_\rho$ *tel que* $\forall\ u \in C_p^{k,\alpha}$ *on a :*

$$c_\rho \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|u_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)} \leq \|u\|_{C_p^{k,\alpha}} \leq C_\rho \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \|u_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)}.$$

En particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $D^i u_{x_0} \equiv [\sigma(x_0)]^{p+i} D^i u(x)$.

Preuve : Sur $B_\rho^{x_0}$, on a $|x| \geq |x_0| - \rho\sigma(x_0)$ d'où l'on tire : $\sigma^2(x) \geq (1-\rho)^2\sigma^2(x_0)$, soit encore :

$$\frac{\sigma(x_0)}{\sigma(x)} \leq \frac{1}{1-\rho}. \tag{4.1}$$

De même $|x| \leq |x_0| + \rho\sigma(x_0)$ nous donne :

$$\frac{\sigma(x)}{\sigma(x_0)} \leq 1 + \rho \tag{4.2}$$

Posons $\underline{\sigma}(x, x') = \min\{\sigma(x), \sigma(x')\}$. On a :

$$\|u_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)} = \|u_{x_0}\|_{C^k(B_\rho)} + \sup_{\substack{X,X'\in B_\rho\\ X\neq X'}} \frac{|D^k u_{x_0}(X) - D^k u_{x_0}(X')|}{|X-X'|^\alpha}$$

$$= \sum_{0\leq i\leq k} \sup_{X\in B_\rho} |D^i u_{x_0}(X)| + \sup_{\substack{X,X'\in B_\rho\\ X\neq X'}} \frac{|D^k u_{x_0}(X) - D^k u_{x_0}(X')|}{|X-X'|^\alpha}$$

$$= \sum_{0\leq i\leq k} \sup_{x\in B_\rho^{x_0}} \sigma(x_0)^{p+i}|D^i u(x)| + \sup_{\substack{x,x'\in B_\rho^{x_0}\\ x\neq x'}} \frac{\sigma(x_0)^{p+k}|D^k u(x) - D^k u(x')|}{(|x-x'|/\sigma(x_0))^\alpha}$$

$$= \sum_{0\leq i\leq k} \sup_{x\in B_\rho^{x_0}} \left(\frac{\sigma(x_0)}{\sigma(x)}\right)^{p+i} \sigma(x)^{p+i}|D^i u(x)| + \sup_{\substack{x,x'\in B_\rho^{x_0}\\ x\neq x'}} \left(\frac{\sigma(x_0)}{\underline{\sigma}(x,x')}\right)^{p+k+\alpha} \frac{\underline{\sigma}(x,x')^{p+k+\alpha}|D^k u(x)-D^k u(x')|}{|x-x'|^\alpha}$$

et d'après (4.1), comme $p\geq 0$:

$$\leq \left(\tfrac{1}{1-\rho}\right)^{p+k} \|u\|_{C_p^k} + \sup_{\substack{x,x'\in B_\rho^{x_0}\\ x\neq x'}} \left(\frac{\sigma(x_0)}{\underline{\sigma}(x,x')}\right)^{p+k+\alpha} \sup_{\substack{x,x'\in B_\rho^{x_0}\\ x\neq x'}} (\underline{\sigma}(x,x'))^{p+k+\alpha} \frac{|D^k u(x) - D^k u(x')|}{|x-x'|^\alpha}$$

$$\leq \left(\tfrac{1}{1-\rho}\right)^{p+k} \|u\|_{C_p^k} + \left(\tfrac{1}{1-\rho}\right)^{p+k+\alpha} \sup_{\substack{x,x'\in \mathbb{R}^n\\ x\neq x'}} (\underline{\sigma}(x,x'))^{p+k+\alpha} \frac{|D^k u(x) - D^k u(x')|}{|x-x'|^\alpha}$$

donc pour tout x_0 fixé dans $\mathbb{R}^n$ on a :

$\|u_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)} \leq \left(\tfrac{1}{1-\rho}\right)^{p+k+\alpha} \|u\|_{C_p^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)}$

d'où finalement

$$(1-\rho)^{p+k+\alpha} \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n} \|u_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)} \leq \|u\|_{C_p^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)}$$

Réciproquement :

$$\|u\|_{C_p^{k,\alpha}} = \|u\|_{C_p^k} + \sup_{\substack{x,x'\in \mathbb{R}^n\\ x\neq x'}} \left\{ [\underline{\sigma}(x,x')]^{p+k+\alpha} \frac{|D^k u(x) - D^k u(x')|}{|x-x'|^\alpha} \right\}$$

$$= \sum_{0\leq i\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{(\sigma(x))^{p+i}|D^i u(x)|\right\} + \sup_{\substack{x,x'\in \mathbb{R}^n\\ x\neq x'}} \left\{ \left(\frac{(\underline{\sigma}(x,x'))}{(\sigma(x_0))}\right)^{p+k+\alpha} (\sigma(x_0))^{p+k+\alpha} \frac{|D^k u(x) - D^k u(x')|}{|x-x'|^\alpha} \right\}$$

$$= \sum_{0\leq i\leq k} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ \left(\frac{\sigma(x)}{\sigma(x_0)}\right)^{p+i} (\sigma(x_0))^{p+i}|D^i u(x)| \right\} + \sup_{\substack{x,x'\in \mathbb{R}^n\\ x\neq x'}} \left\{ \left(\frac{(\underline{\sigma}(x,x'))}{(\sigma(x_0))}\right)^{p+k+\alpha} \frac{(\sigma(x_0))^{p+k}|D^k u(x) - D^k u(x')|}{\sigma(x_0)^{-\alpha}|x-x'|^\alpha} \right\}$$

et d'après (4.2) :

$$\leq (1+\rho)^{p+k} \sum_{0\leq i\leq k} \sup_{X\in B_\rho} |D^i u_{x_0}(X)| + (1+\rho)^{p+k+\alpha} \sup_{\substack{X,X'\in B_\rho\\ X\neq X'}} \frac{|D^k u_{x_0}(X) - D^k u_{x_0}(X')|}{|X-X'|^\alpha}$$

$\leq (1+\rho)^{p+k+\alpha} \|u_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)}$

d'où

$$c_\rho \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n} \|u_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)} \leq \|u\|_{C_p^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C_\rho \sup_{x_0\in\mathbb{R}^n} \|u_{x_0}\|_{C^{k,\alpha}(B_\rho)}.$$

Avec $\quad c_\rho = (1-\rho)^{p+k+\alpha} \quad \text{et} \quad C_\rho = (1+\rho)^{p+k+\alpha}$

■

Introduisons d'autre normes, utilisées [8] (page 61) pour des estimations intérieures. Soit Ω un ouvert strict de $\mathbb{R}^n$; pour $x, y \in \Omega$, on pose $d_x = dist(x, \partial\Omega)$, $d_{x,x'} = min(d_x, d_{x'})$. On définit pour u dans un sous espace de $C^k(\Omega), C^{k,\alpha}(\Omega)$ les normes qui sont analogues aux normes au-dessus,

$$\|u\|^*_{C^k(\Omega)} = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x\in\Omega} d_x^k |D^i u(x)|,$$

$$\|u\|^*_{C^{k,\alpha}(\Omega)} = \|u\|^*_{C^k(\Omega)} + [u]^*_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$$

avec

$$[u]^*_{C^{k,\alpha}(\Omega)} = \sup_{\substack{x,x'\in\Omega \\ x\neq x'}} d_{x,x'}^{k+\alpha} \frac{|D^k u(x) - D^k u(x')|}{|x-x'|^\alpha}.$$

On aura besoin des inégalités d'interpolation suivantes :

Lemme 4.2 ([8], Lemme 6.32 p. 130) *On suppose $j+\beta < k+\alpha$ avec $j,k = 0,1,\ldots$ et $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ alors $\forall\ \varepsilon > 0$ il existe $c(\varepsilon, k, j) > 0$ tel que :*

$$\|u\|^*_{C^{j,\beta}(\Omega)} \leq \varepsilon [u]^*_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + c\|u\|_{C^0(\Omega)}$$

On va utiliser ce lemme plus loin (Chapitre 7).

Lemme 4.3 ([8], Lemme 6.35 p. 135) *On suppose $j+\beta < k+\alpha$ avec $j,k = 0,1,\ldots$ et $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Soit Ω est un $C^{k,\alpha}$ domaine dans $\mathbb{R}^n$, $u \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ alors $\forall\ \varepsilon > 0$ il existe $c(\varepsilon, k, j, \Omega) > 0$ tel que :*

$$\|u\|_{C^{j,\beta}(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} + c\|u\|_{C^0(\Omega)}.$$

4.2 Quelques propriétés des espaces $C_p^{k,\alpha} = C_p^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)$

Proposition 4.1 (voir[5]) *Les espaces de Hölder à poids $C_p^{k,\alpha}$ ont les propriétés suivantes :*

1. *L'application multiplication de* $C_p^{k,\alpha} \times C_{p'}^{k',\alpha'} \longrightarrow C_{p+p'}^{min(k,k'),min(\alpha,\alpha')}$ *est continue.*
2. C_p^k *s'injecte continument dans* $C_{p'}^{k'}$ *si* $k' \leq k,\ p' \leq p$.
3. $C_p^{k,\alpha}$ *s'injecte continument dans* $C_{p'}^{k',\alpha'}$ *où* $(k'+\alpha') \leq (k+\alpha)$ *et* $p' \leq p$.
4. *L'inclusion naturelle de* $C_p^{k,\alpha}$ *dans* $C_{p'}^{k',\alpha'}$ *avec* $(k'+\alpha') < (k+\alpha)$ *et* $p' < p$ *est compacte.*

Corollaire 4.1 *Soit deux entiers* $j < k$ *et un réel* $p \geq 0$, *pour tout* $\epsilon \in (0,1)$, *il existe une constante* $c(\epsilon, p)$ *telle que pour tout* $u \in C_p^2(\mathbb{R}^n)$ *on a :*

$$M_{p,j}(u) \leq \epsilon M_{p,k}(u) + c(\epsilon, p) M_{p,0}(u)$$

où $M_{p,i}(u)$ *est ici considéré avec* $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Preuve : On utilise le lemme précédent pour la fonction u_{x_0} dans le cas où $\alpha = \beta = 0$ et Ω est la boule B_ρ, où u_{x_0} et B_ρ sont définies dans le Lemme 4.1. On obtient :

$$\|u_{x_0}\|_{C^j(B_\rho)} \leq \varepsilon \|u_{x_0}\|_{C^k(B_\rho)} + c\|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)}$$

en prenant le $\sup\limits_{x_0 \in B_\rho}$ pour l'inégalité précédente, d'après le Lemme 4.1 on obtient :

$$\|u\|_{C_p^j(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|u\|_{C_p^k(\mathbb{R}^n)} + c\|u\|_{C_p^0(\mathbb{R}^n)}$$

donc

$$(1-\varepsilon)\sum_{i=0}^{j} M_{p,i}(u) \leq \varepsilon \sum_{i=j+1}^{k} M_{p,i}(u) + C M_{p,0}(u)$$

$$\begin{cases} Si\ j = k-1,\ M_{p,k-1}(u) \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} M_{p,k}(u) + \frac{C}{1-\varepsilon} M_{p,0}(u). \\ Si\ j = k-2,\ M_{p,k-2}(u) \leq \left[\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right] M_{p,k}(u) + \left[\frac{C\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} + \frac{C}{(1-\varepsilon)}\right] M_{p,0}(u). \\ Si\ j = k-3,\ M_{p,k-3}(u) \leq \left[\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^3 + 2\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right] M_{p,k}(u) + \\ \qquad\qquad \left[\frac{C\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^3} + 2\frac{C\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} + \frac{C}{(1-\varepsilon)}\right] M_{p,0}(u). \\ Si\ j = k-4,\ M_{p,k-4}(u) \leq \left[\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^4 + 3\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^3 + 3\left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\right] M_{p,k}(u) + \\ \qquad\qquad \left[\frac{c\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^4} + 3\frac{c\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^3} + 3\frac{C\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} + \frac{C}{(1-\varepsilon)}\right] M_{p,0}(u). \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ Si\ j = k-i,\ M_{p,k-i}(u) \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left[1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]^{i-1} M_{p,k}(u) + \frac{C}{1-\varepsilon}\left[1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]^{i-1} M_{p,0}(u). \end{cases}$$

D'où $\forall\ j = 1, \ldots, k-1$ on obtient :

$$M_{p,j}(u) \leq \tfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\left[\tfrac{1}{1-\varepsilon}\right]^{k-j-1} M_{p,k}(u) + \tfrac{C}{1-\varepsilon}\left[\tfrac{1}{1-\varepsilon}\right]^{k-j-1} M_{p,0}(u).$$

■

4.3 Estimation *a priori* de type Schauder

Dans cette section on prend $p > 0$.

Théorème 4.1 (Estimation de Schauder) *Soit $L = a^{ij}(x)\partial_{ij} + b^i(x)\partial_i + c(x)$ un opérateur différentiel linéaire strictement elliptique sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire il $\exists\ \theta > 0$ tel que pour tout $v \in \mathbb{R}^{n*}$, $a(v,v) \geq \theta |v|^2$, dont les coefficients vérifient les conditions suivantes :*

$$a^{ij} = a^{ji}, a^{ij} \in C_0^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n),\ b^i \in C_1^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n)\ et\ c \in C_2^{k,\alpha}(\mathbb{R}^n).$$

Il existe $C > 0$, ne dépendant que des normes des coefficients de l'opérateur L, telle que, Si u est une solution de l'équation $Lu = f$ avec $u \in C_p^0 \cap C_{loc}^2$ et $f \in C_{p+2}^{k,\alpha}$ alors $u \in C_p^{k+2,\alpha}$ et

$$\|u\|_{C_p^{k+2,\alpha}} \leq C\left(\|f\|_{C_{p+2}^{k,\alpha}} + \|u\|_{C_p^0}\right).$$

Les arguments principaux de la démonstration du Théorème 4.1 donnée dans [5] sont :

1. En posant $v = \sigma^p u$, on se ramène à démontrer le théorème pour $p = 0$.
2. On écrit u sous la forme $u = \chi + (1-\chi)u$ où χ est une fonction régulière telle que $\chi = 1$ sur B_3, positive à l'intérieur de B_4 et s'annule à l'extérieur de B_4.
3. On utilise l'estimation de Schauder intérieur classique [8] tour à tour dans B_4 et à l'extérieur de B_3.
4. On utilise les inégalités d'interpolation.

Pour la démonstration complète voir [5].

Nous allons démontrer le Théorème 4.1, par une méthode différente, dans le cas $k = 2$.

Preuve : Grace au Corollaire 4.1 il suffit de majorer $M_{p,2}(u)$ *et* $M_{p,2+\alpha}(u)$.

Estimation de $M_{p,2}(u) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |\sigma(x)^{p+2} D^2 u(x)|$: Fixons $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et étudions

$$\sigma(x_0)^{p+2} |D^2 u(x_0)| \tag{4.3}$$

Soit B une boule de centre x_0 et de rayon $d = \theta\sigma(x_0)$ où $0 < \theta < 1/2$, θ sera déterminé plus tard. Dans B on a :

$$L_0[u] = F(x)$$

où

$$F(x) = L_0[u] - L[u] + f(x) \ et \ L_0[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

où $(a_{ij}(x_0))_{1<i,j<n}$ est une matrice à coefficients constants. Donc d'après [8] (Lemme 6.1) on obtient :

$$|D^2 u(x_0)| \le C\left(\frac{1}{d^2}\sup_B|u| + \sup_B|F| + d^\alpha \sup_{x\in B}\frac{|F(x_0) - F(x)|}{|x_0 - x|^\alpha}\right) \tag{4.4}$$

On évalue (4.3), à l'aide de (4.4), en utilisant la double inégalité, valable dans B :

$$(1-\theta)\sigma(x_0) \le \sigma(x) \le (1+\theta)\sigma(x_0).$$

1er terme :
$\frac{1}{d^2}\sup_B|u| \ \sigma(x_0)^{p+2} \le \frac{\sigma(x_0)^{p+2}}{\theta^2\sigma(x_0)^2}\sup_{x\in B}\sigma(x)^p|u(x)|\frac{1}{\sigma(x)^p} \le C(\theta)M_{p,0}(u).$

2ème terme : $\sigma(x_0)^{p+2}\sup_B|F| \le$

$$\sigma(x_0)^{p+2}\sup_{x\in B}\left\{\left|\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\right) D^2u(x) - \sum_{i=1}^{n} b^i Du(x) - c(x)u(x) + f\right|\right\}.$$

Commençons par le terme : $\sigma(x_0)^{p+2}\sup_{x\in B}\left\{\left|\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\right) D^2u(x)\right|\right\}$

$$\le \sigma(x_0)^{p+2}\sup_{x\in B}\sigma(x_0)^\alpha \frac{\left|\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x_0) - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\right|}{|x_0 - x|^\alpha}\frac{|x_0-x|^\alpha}{\sigma(x_0)^\alpha}\sup_{x\in B}\sigma(x)^{p+2}|D^2u(x)|\ \frac{1}{\sigma(x)^{p+2}}.$$

$\le C(\|a^{ij}\|, \theta)\ \theta^\alpha M_{p,2}(u)$
en utilisant l'abbréviation $\|a^{ij}\| = \|a^{ij}\|_{C_0^{0,\alpha}}$.

Les autres termes donnent comme majoration : $C(\|b^i\|)M_{p,1}(u)$ *et* $C(\|c\|)M_{p,0}(u)$, en abrégeant de même $\|b^i\| = \|b^i\|_{C_1^{0,\alpha}}$, $\|c\| = \|c\|_{C_2^{0,\alpha}}$.
Finalement

$$\sigma(x_0)^{p+2}\sup_B|F| \le C(\|a^{ij}\|, \|b^i\|, \|c\|, \theta)\{M_{p,1}(u) + M_{p,0}(u) + \|f\|_{C^0_{p+2}} + \theta^\alpha M_{p,2}(u)\}$$

3ème terme :
Par des majoration analogues on trouve :

$$\sigma(x_0)^{p+2} d^{\alpha} \sup_{x \in B} \frac{|F(x_0) - F(x)|}{|x_0 - x|^{\alpha}} \leq \theta^{\alpha} C(\|a^{ij}\|, \|b^i\|, \|c\|, \theta)\ M_{p,i}(u) \quad (i < 2)$$

Finalement, en reportant dans (4.3) on obtient :

$$M_{p,2}(u) \leq C(\|a^{ij}\|, \|b^i\|, \|c\|, \theta)\ \{\|f\|_{C^{0,\alpha}_{p+2}} + M_{p,0}(u) + \theta^{\alpha} M_{p,2}(u)\}$$

On choisit la valeur de θ, de manière à ce que le coefficient de $M_{p,2}(u)$ soit inférieur à $1/2$ on obtient alors :

$$M_{p,2}(u) \leq C(\|a^{ij}\|, \|b^i\|, \|c\|)\ \left\{\|f\|_{C^{0,\alpha}_{p+2}} + M_{p,0}(u)\right\}$$

Estimation de $M_{p,2+\alpha}$
Fixons les deux points x et x' et étudions :

$$min\{\sigma(x), \sigma(x')\}^{p+2+\alpha} \frac{|D^2u(x) - D^2u(x')|}{|x - x'|^{\alpha}}$$

Supposons : $\sigma(x) \leq \sigma(x')$ et soit θ choisi comme précédemment ; on distingue deux régions :

1) $|x - x'| \geq \left(\dfrac{\theta}{4}\right) \sigma(x)$ alors on obtient :

$$\leq \left(\frac{4}{\theta}\right)^{\alpha} \frac{\sigma(x)^{p+2+\alpha}}{\sigma(x)^{\alpha}} \left(|D^2u(x)| + |D^2u(x')|\right) \leq C(\theta)\ M_{p,2}(u) \leq C\left(\|f\|_{C^{0,\alpha}_{p+2}} + M_{p,0}(u)\right)$$

2) $|x - x'| \leq \left(\dfrac{\theta}{4}\right) \sigma(x)$ alors on obtient :

$$\frac{|D^2u(x) - D^2u(x')|}{|x - x'|^{\alpha}} \leq \frac{K}{d^{\alpha}} + C\ \frac{|F(x) - F(x')|}{|x - x'|^{\alpha}}$$

où K et C sont deux constantes qui dépendent seulement de $\|a^{ij}\|, \|b^i\|\ et\ \|c\|$.
Les deux majorations de $M_{p,2}(u)$ et $M_{p,2+\alpha}$ conduisent à la majoration de Schauder.

■

4.4 Théorème d'isomorphisme

Dans cette section, on prend $p \in (0, n-2)$ et on se restreint aux opérateurs L sur $\mathbb{R}^n$ qui seront utiles dans cette thèse, pour donner à leur propos un résultat d'isomorphisme

particulier entre espaces de Hölder à poids. Un résultat plus général nécessiterait des hypothèses plus fortes sur les coefficients de L.
On commence par rappeler l'existence et le comportement de fonctions de Green.

Théorème 4.2 ([5], Théorème 3, [13] et [17]) *Soit $L = \partial_i(a^{ij}(x)\partial_j)$ un opérateur différentiel linéaire elliptique sur $\mathbb{R}^n$ tel que : $a^{ij} = a^{ji} \in C^{k,\alpha}_{loc}$, $\partial_i(a^{ij}) = 0$ et il existe $0 < c \leq C$ tel que $c\delta^{ij} \leq a^{ij} \leq C\delta^{ij}$. Il existe une unique fonction symétrique négative maximale $G_L(x,y) \in C^{k+2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \Delta)$, où Δ désigne la diagonale $\{x = y\}$, et $0 < \theta \leq \Theta$ tels que :*

1. *$L[G_L(x,.)] = \delta_x$, où δ_x est la mesure de Dirac au point x.*
2. *$\theta|x-y|^{2-n} \leq |G_L(x,y)| \leq \Theta|x-y|^{2-n}$.*

Lemme 4.4 *Soit $L = \partial_i(a^{ij}(x)\partial_j)$ un opérateur différentiel linéaire elliptique sur $\mathbb{R}^n$ tel que $a^{ij} = a^{ji}$, $a^{ij} \in C^{k,\alpha}_0$, $\partial_i(a^{ij}) = 0$ et il existe $0 < \lambda \leq \Lambda$ tel que $\lambda\delta^{ij} \leq a^{ij} \leq \Lambda\delta^{ij}$. Il existe $C > 0$, ne dépendant que de la norme $C^{k,\alpha}_0$ de a^{ij}, tel que , pour tout $u \in C^{k+2,\alpha}_p$ avec $p \in (0, n-2)$:*

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}_p} \leq C\|Lu\|_{C^{k,\alpha}_{p+2}}.$$

Preuve : d'après le Théorème 4.1 il suffit de démontrer :

$$\|u\|_{C^0_p} \leq C\|Lu\|_{C^0_{p+2}}$$

Mais par conséquence du Théorème 4.2 et du Lemme 4.5 (ci-après), on obtient le résultat.

Théorème 4.3 *Pour tout $p \in (0, n-2), \alpha \in (0,1), k \in \mathbb{N}$, le Laplacien Δ de l'espace euclidien de dimension $n > 2$ est un isomorphisme de $C^{k+2,\alpha}_p$ dans $C^{k,\alpha}_{p+2}$.*

Avant de commencer la preuve de ce théorème on présente un résultat plus général qui a une démonstration basée sur ce Théorème.

Corollaire 4.2 *Soit L un opérateur qui vérifie les hypothèses du Lemme 4.4. Alors pour tout $p \in (0, n-2), L$ est un isomorphisme de $C^{k+2,\alpha}_p$ dans $C^{k,\alpha}_{p+2}$.*

Preuve : Si L vérifie l'hypothèse du Lemme 4.4, alors $\forall\ t \in [0,1]$ l'opérateur :

$$L_t = tL + (1-t)\Delta$$

vérifie encore l'hypothèse de ce lemme. Ici on choisit pour la constante C qui apparait dans le Lemme 4.4, la norme de l'opérateur L : $C_L = \|L\|$, c'est-à-dire

$$C_L = \sup \|Lu\|_{C^{k,\alpha}_{p+2}} \quad pour \quad \|u\|_{C^{k+2,\alpha}_p} = 1.$$

De même $\forall\ t \in [0,1]$ il existe $C_{L_t} > 0$ tel que

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}_p} \leq C_{L_t} \|L_t u\|_{C^{k,\alpha}_{p+2}}.$$

Soit $C = \max\limits_{t\in[0,1]}(C_{L_t})$; C existe à cause de la compacité de l'intervalle $[0,1]$ et la continuité de l'application $t \in [0,1] \to C_{L_t}$. Donc pour tout $t \in [0,1]$ on obtient

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}_p} \leq C \|L_t u\|_{C^{k,\alpha}_{p+2}}.$$

De plus L_t est un opérateur linéaire continu de $C^{k+2,\alpha}_p$ dans $C^{k,\alpha}_{p+2}$, injectif d'après l'inégalité précédente (ou par le Principe du Maximum). Par ailleurs d'après le Théorème 4.3 Δ est surjectif de $C^{k+2,\alpha}_p$ dans $C^{k,\alpha}_{p+2}$. Donc la Méthode de continuité linéaire (voir plus loin le Théorème 5.1) nous montre que L est aussi un opérateur surjectif de $C^{k+2,\alpha}_p$ dans $C^{k,\alpha}_{p+2}$. D'où le résultat, compte-tenu du théorème de l'application ouverte [3].

$\blacksquare$

Preuve du Théorème 4.3.3 :

Pour k entier, $p \in \mathbb{R}, \alpha \in (0,1)$, Δ est un opérateur linéaire continu de $C^{k+2,\alpha}_p$ *dans* $C^{k,\alpha}_{p+2}$. Δ est aussi injectif d'après le Principe du Maximum pour tout $p > 0$. Donc, d'après le Théorème de l'application ouverte [3](page 18), il nous reste à démontrer la surjectivité de Δ pour $p \in (0, n-2)$.

D'après le Théorème 4.1 la surjectivité de Δ est réduite à faire l'estimation de $\|u\|_{C^0_p}$ en fonction de Δu.

Lemme 4.5 *Pour tout $p \in (0, n-2)$ et pour tout $u \in C^2_p$ on a :*

$$\|u\|_{C^0_p} \leq [p(n-2-p)]^{-1} \|\Delta u\|_{C^0_{p+2}}.$$

Remarque 4.1 Ce lemme nous montre l'importance de prendre $p \in (0, n-2)$.

Preuve du lemme :

Soit $(p_i)_i$ une suite croissante dans $(0,p)$ qui tend vers p, posons

$$v_i = \sigma^{p_i} u \Rightarrow u = \sigma^{-p_i} v_i.$$

On a :

$$\Delta u = v_i \Delta \sigma^{-p_i} + 2\nabla \sigma^{-p_i} \nabla v_i + \sigma^{-p_i} \Delta v_i \tag{4.5}$$

Comme v_i tend vers 0 à l'infini, et

$$\Delta \sigma^{-p_i} = p_i(p_i+2)\sigma^{-p_i-4}|x|^2 - np_i\sigma^{-p_i-2},$$

alors :

1. Si v_i admet un maximum positif $M_i > 0$, alors il existe $x_i \in \mathbb{R}^n$ tel que $\underset{x\in\mathbb{R}^n}{max}(v_i) = v_i(x_i) = M_i$. Au point x_i, on a $\nabla v_i(x_i) = 0$ et $\Delta v_i \leq 0$, donc l'équation (4.5) nous donne :

   $$\begin{aligned}\Delta u(x_i) &\leq M_i \Delta \sigma^{-p_i} \\ &\leq M_i \left(p_i(p_i+2)\sigma^{-p_i-4}|x|^2 - np_i\sigma^{-p_i-2}\right)\end{aligned}$$

   alors

   $$\begin{aligned}\sigma^{p_i+2}\Delta u(x_i) &\leq M_i \left(p_i(p_i+2)|x|^2/\sigma^2 - np_i\right) \\ &\leq M_i \left(p_i(p_i+2) - np_i\right).\end{aligned}$$

   Comme $(p_i + 2 - n) < 0$, on en déduit :

   $$M_i \leq [p_i(n-p_i-2)]^{-1}|\Delta u|_{C^0_{p+2}}$$

2. Si v_i admet un minimum négatif $m_i < 0$, donc atteint en un point x_i, soit $v_i(x_i) = m_i$ et encore d'après (4.5) on obtient :

   $$\Delta u(x_i) \geq m_i \Delta \sigma^{-p_i}$$

   d'où

   $$|m_i| \leq [p_i(n-p_i-2)]^{-1}|\Delta u|_{C^0_{p+2}}$$

   Dans les deux cas, on conclut en faisant i tendre vers l'infini.

Chapitre 5

Méthode de continuité

L'idée de la méthode de continuité pour résoudre une équaton est d'introduire une paramètre de déformation $t \in [0,1]$, de façon que pour $t = 0$ on sache résoudre l'équation déformée, que pour $t = 1$ on ait l'équation originale, et que l'existence d'une solution pour $t \in [0,1]$ puisse être réduite à l'obtention d'une estimation *a priori* sur ladite solution (dans un espace normé convenable).

Commençons par un rappel.

Définition 5.1 *Soient $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ deux espaces vectoriels normés. Une application $T : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ est dite contractante si c'est une application θ-lipschitzienne avec $\theta \in [0,1)$. C'est-à-dire*

$$\|Tx - Ty\|_{\mathcal{V}_2} \leq \theta \|x - y\|_{\mathcal{V}_1} \ \forall \ x, y \in \mathcal{V}_1$$

Théorème 5.1 ([8], p.74) *Une application contractante $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sur un espace de Banach $\mathcal{V}$ admet une unique point fixe, c'est-à-dire il existe une unique solution $x \in \mathcal{V}$de l'équation $Tx = x$.*

5.1 Méthode de continuité linéaire

Soit $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ deux espaces vectoriels normés. $T : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_2$ est dite bornée si

$$\|T\| = \underset{x \in \mathcal{V}_1, x \neq 0}{Sup} \frac{\|Tx\|_{\mathcal{V}_2}}{\|x\|_{\mathcal{V}_1}}$$

est fini. Il est claire qu' une application linéaire T est bornée si et seulement si elle est continue.

Théorème 5.1 ([8], p.75) *Soient L_0, L_1 deux applications linéaires bornées de $\mathcal{V}_1$ dans $\mathcal{V}_2$. Soit $t \in [0,1]$ et*

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1$$

et supposons qu'il existe une constante C telle que :

$$\forall\ t \in [0,1], \quad \|x\|_{\mathcal{V}_1} \leq C\|L_t x\|_{\mathcal{V}_2}. \tag{5.1}$$

Alors L_t est surjective pour tout $t \in [0,1]$ si et seulement si L_s l'est pour un $s \in [0,1]$.

Preuve : Soit $s \in [0,1]$ tel que L_s est surjective. D'aprés 5.1, L_s est injective, donc soit $L_s^{-1} : \mathcal{V}_2 \longrightarrow \mathcal{V}_1$ l'inverse de L_s. Pour $t \in [0,1], y \in \mathcal{V}_2$, l'équation $L_t x = y$ est équivalente à :

$$\begin{aligned} L_s(x) &= y + (L_s - L_t)x \\ &= y + (t-s)L_0 x - (t-s)L_1 x \end{aligned}$$

ou encore à :

$$x = L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$$

Pour y fixé, soit $T : \mathcal{V}_1 \longrightarrow \mathcal{V}_1$ défini par $Tx := L_s^{-1}y + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)x$. On a clairement que T est une application contractante si

$$|s-t| < [C(\|L_0\| + \|L_1\|)]^{-1} =: \delta$$

d'où L_t est surjective à condition que $|s-t| < \delta$. Donc par division de l'intervalle $[0,1]$ en sous-intervalles de longueur δ on obtient que L_t est surjective pour tout t fixé dans $[0,1]$; en particulier pour $t = 0$ ou $t = 1$.

■

5.2 Méthode de continuité non linéaire

Nous allons maintenant mettre en place la méthode de résolution de l'équation totalement non-linéaire, posée dans cette thèse, à savoir l'équation (1.1) qui peut être écrite :

$$\mathcal{N}_\kappa[u] := \log[\tilde{\sigma}_\kappa(\lambda(a_u))] = \log[1+\phi], \quad \text{avec } \psi = 1 + \phi > 0 \tag{5.2}$$

Définition 5.2 *Soient $(p, \alpha) \in (0, n-2) \times (0,1)$, on dit que u est une solution admissible si $u \in C_p^{2,\alpha}$ est κ-admissible et satisfait l'équation (5.2).*

Remarquons tout de suite qu'il existe au plus une solution admissible de l'équation (5.2), ceci d'après le Corollaire 3.1.

Équation de continuité Pour $t \in [0,1]$, nous allons considérer l'équation de continuité :

$$\tilde{F}_\kappa[a_{u_t}] = \tilde{\sigma}_\kappa(\lambda(a_{u_t})) = 1 + t\phi = \psi_t \text{ avec } \phi \in \mathrm{C}^{0,\alpha}_{\mathrm{p+2}}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \text{ telle que } \psi_1 = \psi = 1 + \phi > 0, \tag{5.3}$$

ou encore :

$$\mathcal{N}_\kappa[u_t] = \log[\psi_t] \tag{5.4}$$

et l'ensemble :

$$\mathcal{T} = \{t \in [0,1] \text{ tel que, il existe } \mathrm{u_t} \text{ solution admissible de } (5.4)\}.$$

On raisonne sur $\mathcal{T}$ par connexité :

- $\mathcal{T} \neq \emptyset, 0 \in \mathcal{T}$ car $u_0 = 0$ est une solution admissible.
- $\mathcal{T}$ **ouvert dans** $[0,1]$.

Soit $t \in \mathcal{T}$, alors, $d\mathcal{N}_\kappa[u_t]$ est un isomorphisme de $C^{2,\alpha}_p(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{0,\alpha}_{p+2}(\mathbb{R}^n)$ (voir Lemme 6.2 ci-après), donc d'après le théorème d'inversion locale et la κ-admissibilité étant une propriété ouverte, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(t-\epsilon, t+\epsilon) \cap [0,1] \subset \mathcal{T}$ donc $\mathcal{T}$ est relativement ouvert dans $[0,1]$. Comme $[0,1]$ est connexe, on obtient ici le :

Théorème 5.2 *L'équation* $\mathcal{N}_\kappa[u] = \log[1+\phi]$ *admet une solution admissible si l'ensemble* $\mathcal{T}$ *est fermé dans* $[0,1]$.

D'après le Théorème précédent, la résolution de l'équation (5.2) est réduite à construire une estimation *a priori* sur les solutions u_t dans l'espace $C^{2,\alpha}_p$ (voir plus loin Chapitre 7), et à démontrer que l'équation de continuité (5.4) est uniformément elliptique indépendamment de $t \in [0,1]$ (voir plus loin Chapitre 7 Section 7.3). En effet, supposons acquises ces estimations, et soit $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{T}$ convergeant vers $t \in [0,1]$: montrons que $t \in \mathcal{T}$.

On a $(t_i)_i \in \mathcal{T}$, il existe une suite des solutions admissibles $(u_{t_i})_i$, d'après notre présente hypothèse, la suite $(u_{t_i})_i$ est bornée dans $C^{2,\alpha}_p$, donc bornée dans $C^{2,\beta}_q$ pour tout $\beta \in (0,\alpha)$ et $q \in (0,p)$. Mais d'après la quatrième assertion de la Proposition 4.1 il existe une sous-suite de $(u_{t_i})_i$ converge dans $C^{2,\beta}_q$ vers $u_t \in C^{2,\alpha}_p$. $\mathcal{N}_\kappa$ étant continu donc u_t vérifie l'équation (5.4).
Il reste seulement à prouver sa κ-admissibilité. Par continuité, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda(a_{u_t})(x)$ est dans la fermeture du cône Γ_κ et à l'intérieur de ce cône quand $|x| \to \infty$ (puisque $D^2u_t(x) \to 0$) ; l'équation (5.4) elle-même, combinée aux inégalités de Mac-Laurin, assure alors que $\lambda(a_{u_t})(x) \in \Gamma_\kappa$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, u_t est

κ-admissible. Donc $t \in \mathcal{T}$ comme annoncé.

■

La remarque suivante nous sera d'une utilité constante par la suite.

Remarque 5.1 *Sous nos hypothèses sur* ϕ*, il existe deux réels* $0 < \varepsilon \leq K$ *tels que :*

$$\forall\ t \in [0,1], \quad \varepsilon \leq \psi_t \leq K \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$$

En effet, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, le réel $\psi_t(x)$ appartient au segment qui joint $\psi_1(x)$ à 1. Il suffit donc d'encadrer positivement ψ_1 sur $\mathbb{R}^n$.

Comme $\phi \in C^{0,\alpha}_{p+2}$, il existe $K \geq 1$ tel que $\psi_1 \leq K$ sur $\mathbb{R}^n$. Puisque $p > 0$, il existe $R > 0$ grand tel que : $\psi_1 \geq \dfrac{1}{2}$ hors de la boule fermé $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$; et dans $B(0,R)$, on a $\inf\limits_{x \in B(0,R)} \psi_1 \geq \varepsilon > 0$ avec, sans restreindre la généralité, $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2}$. Finalement, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,1]$, on a bien $\varepsilon \leq \psi_t \leq K$.

Chapitre 6

Inversibilité locale

Soient $p \in (0, n-2)$ et

$$\Omega^2 = \{u \in C^2(\mathbb{R}^n),\ u\ est\ \kappa\text{-admissible}\}$$

On note par :

$$C_p^\infty \equiv \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_p^{k,\alpha},\quad \Omega^k \equiv \Omega^2 \cap C^k,\quad \Omega_p^k \equiv \Omega^2 \cap C_p^k,\quad \Omega_p^{k,\alpha} \equiv \Omega^2 \cap C_p^{k,\alpha},\quad \Omega_p^\infty \equiv \Omega^2 \cap C_p^\infty$$

6.1 Propriétés de l'opérateur $\mathcal{N}_\kappa$

Rappelons d'abord la définition de l'opérateur :

$$\mathcal{N}_\kappa[u] = \log[\tilde{\sigma}_\kappa(\lambda(a_u))]$$

Lemme 6.1 *L'opérateur $\mathcal{N}_\kappa$ est elliptique sur Ω^2 et concave à l'égard de D^2u. En outre, pour chaque $u \in \Omega_p^2$ fixé avec $p > 0$, les linéarisés $d\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[u]$ et $d\mathcal{N}_\kappa[u]$ sont uniformément elliptiques sur $\mathbb{R}^n$ autrement dit, il existe des constantes $0 < c \leq C$ telles qu'en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on ait :*

$$\forall\ \xi \in (\mathbb{R}^n)^*,\quad c|\xi|^2 \leq \sum \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_\kappa}{\partial a_{ij}}[u]\xi_i\xi_j \leq C|\xi|^2,$$

et

$$c|\xi|^2 \leq \sum \frac{\partial \mathcal{N}_\kappa}{\partial a_{ij}}[u]\xi_i\xi_j \leq C|\xi|^2$$

Preuve : La première partie suit des Lemme 2.2 et Corollaire 2.2. La seconde se démontre comme l'estimation *a priori* de l'ellipticité uniforme de l'équation de continuité (5.3), voir Lemme 7.6 au Chapitre 7, à quoi elle peut être réduite grâce à l'observation suivante : $u \in \Omega_p^k$ étant fixé, avec $p > 0$, la fonction auxiliaire ψ_u définie par :

$$\psi_u := \tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)]$$

est dans l'ouvert

$$\vartheta_{p+2} = \{\psi \in C^0(\mathbb{R}^n), \psi > 0, (\psi - 1) \in C^0_{p+2}\},$$

de quoi résulte facilement d'une part la positivité stricte de $\inf_{\mathbb{R}^n} \psi_u$, d'autre part la finitude de $\sup_{\mathbb{R}^n} \psi_u$

■

Lemme 6.2 *Pour tout $k > 0$ et pour tout $u \in \Omega_p^{k+2,\alpha}$, l'application :*

$$d\mathcal{N}_\kappa[u] : C_p^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_{p+2}^{k,\alpha}$$

est un isomorphisme.

Preuve : Fixons $u \in \Omega_p^{k+2,\alpha}$. D'après le Corollaire 2.3, pour tout $v \in C^2$ on a :

$$d\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[u](v) = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \tilde{F}_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u)\partial_j v\right).$$

D'où :

$$d\mathcal{N}_\kappa[u](v) = \frac{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \tilde{F}_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u) v_j\right)}{\tilde{\sigma}_\kappa(\lambda(a_u))} \tag{6.1}$$

donc d'après cette formule et la première assertion de la Proposition 4.1, $d\mathcal{N}_\kappa[u]$ est bien définie, linéaire et continue de $C_p^{k+2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{k,\alpha}$; en outre $\frac{\partial \tilde{F}_\kappa}{\partial a_{ij}}(a_u) \in C_0^{k,\alpha}$. D'après le Lemme 6.1, $d\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[u]$ est uniformément elliptique sur $\mathbb{R}^n$. Compte-tenu de la Proposition 2.2, on peut appliquer à $d\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[u]$ le Corollaire 4.2 et conclure que c'est un isomorphisme de $C_p^{k+2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{k,\alpha}$.

Par ailleurs, d'après la (fin de la) preuve du Lemme 6.1, on a $\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)] \in C_0^{k,\alpha}$, donc, par la première assertion de la Proposition 4.1, $\forall\, h \in C_{p+2}^{k,\alpha}$ on aura $h\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)] \in C_{p+2}^{k,\alpha}$, donc il existe $v \in C_p^{k+2,\alpha}$ unique tel que :

$$d\tilde{\mathcal{F}}_\kappa[u](v) = h\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)]$$

ou encore, tel que :

$$d\mathcal{N}_\kappa[u](v) = h.$$

Autrement dit, le linéarisé $d\mathcal{N}_\kappa[u] : C_p^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_{p+2}^{k,\alpha}$ est bien un isomorphisme.

■

Par ailleur, comme nous l'avons déjà remarqué, le Corollaire 3.1 implique :

Lemme 6.3 $\mathcal{N}_\kappa$ *:* $\Omega_p^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_{p+2}^{k,\alpha}$ *est injectif.*

Finalement, nous obtenons :

Lemme 6.4 *L'application*

$$\mathcal{N}_\kappa : \Omega_p^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_{p+2}^{k,\alpha}$$

est un difféomorphisme sur son image.

Preuve :

D'après le Lemme 6.2 on sait que pour tout $u \in \Omega_p^{k+2,\alpha}$, $d\mathcal{N}_\kappa[u]$ est un isomorphisme de $C_p^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_{p+2}^{k,\alpha}$. Donc d'après le Théorème d'inversion locale $\mathcal{N}_\kappa : \Omega_p^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_{p+2}^{k,\alpha}$ est difféomorphisme local. Etant injectif sur $\Omega_p^{k+2,\alpha}$, c'est donc un difféomorphisme de $\Omega_p^{k+2,\alpha}$ sur son image.

La résolution de l'équation (5.2) montrera que $\mathcal{N}_\kappa : \Omega_p^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_{p+2}^{k,\alpha}$ est de plus surjectif.

Chapitre 7

Estimations a priori

Dans ce chapitre nous montrons l'existence d'une solution radiale unique quand la donnée ϕ est radiale et nous décrivons les estimations *a priori* sur $u_t \in C_p^{2,\alpha}$ solution κ-admissible de (5.4). Il s'agit d'abord de construire des solutions supérieure et inférieure radiales κ-admissibles, qui conduiront (par comparaison) à l'estimation C_p^0. Il s'agit ensuite, nous appuyant sur un principe du maximum pour les dérivées secondes, d'en déduire l'ellipticité uniforme du linéarisé $d\mathcal{N}_\kappa[u_t]$. Il s'agit enfin, d'obtenir l'estimation $C_p^{2,\alpha}$ à partir des précédentes.

7.1 Existence d'une solution radiale

Soit $r = |x|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$. Quand $\phi(x) = \varphi(r)$, on dira que ϕ est radiale.

Lemme 7.1 *Si ϕ est radiale et $u \in \zeta_0^2(\mathbb{R}^n)$ solution κ-admissible de l'équation (5.2) alors u est radiale.*

Preuve Soit $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $R \in O(n)$. Comme ϕ radiale, alors $\forall\ R \in O(n)$, on a $\phi(Rx) = \phi(x)$. Soit u solution admissible de l'équation (5.2), on a :

$$\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)] = 1 + \phi = \psi > 0,$$

donc $\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)] \circ R = \psi \circ R$ ou encore $\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u \circ R)] = \psi$ car σ_κ et δ_{ij} sont invariantes par rotation, ainsi que ψ par hypothèse. Donc $h = u \circ R$ est aussi solution de l'équation $\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_h)] = \psi > 0$. Par unicité de la solution (voir Corollaire 3.1), on obtient $u \circ R = u$, donc u est radiale.

■

Proposition 7.1 (Calcul de la solution radiale) *Si ϕ est radiale avec $1+\phi > 0$, alors la solution radiale U nulle à l'infini de l'équation (5.2) s'écrit formellement :*

$$U(r) = -\int_r^\infty s\left[\left(1+n\int_0^1 \varphi(\tau s)\tau^{n-1}d\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right] ds$$

Preuve : En notant

$$u(x) \equiv U(r)\ ,\ \dot{U} = \frac{dU}{dr}\ ,\ \ddot{U} = \frac{d^2U}{dr^2}\ :$$

on obtient

$$\partial_i u(x) = \tfrac{x_i}{r}\dot{U}\quad et\ \partial_{ij}u(x) = \tfrac{x_i x_j}{r^2}\left(\ddot{U} - \tfrac{\dot{U}}{r}\right) + \delta_{ij}\tfrac{\dot{U}}{r}.$$

Pour faire le calcul de $\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)]$ au point $x \neq 0$, on se ramène par rotation au cas $x = (r, 0, \ldots, 0)$. Alors, si u satisfait l'équation $\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(a_u)] = 1+\phi$, U vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\kappa}{n}\left(\ddot{U}+1\right)\left(\tfrac{\dot{U}}{r}+1\right)^{\kappa-1} + \tfrac{n-\kappa}{n}\left(\tfrac{\dot{U}}{r}+1\right)^{\kappa} = 1+\varphi \tag{7.1}$$

donc

$$\left(\ddot{U}+1\right) + \tfrac{n-\kappa}{\kappa}\left(\tfrac{\dot{U}}{r}+1\right) = \psi\left(\tfrac{\dot{U}}{r}+1\right)^{1-\kappa}\quad avec\ \ \psi\ = \tfrac{n}{\kappa}(1+\varphi)$$

On pose :

$$v(r) = \dot{U}(r)$$

d'où

$$(\dot{v}+1) + \tfrac{n-\kappa}{\kappa}\left(\tfrac{v}{r}+1\right) = \psi\left(\tfrac{v}{r}+1\right)^{1-\kappa}$$

On fait le changement de fonctions :

$$z = \tfrac{v}{r}+1$$

Alors

$$\dot{z} = \tfrac{-1}{r^2}v + \tfrac{1}{r}\dot{v}$$

donc

$$r\dot{z} = (1-z)+\dot{v} \Rightarrow r\dot{z} = 1-z+\psi z^{(1-\kappa)} - \tfrac{n-\kappa}{\kappa}z - 1 \Rightarrow r\dot{z} = \psi z^{(1-\kappa)} - \left(\tfrac{n-\kappa}{\kappa}+1\right)z$$

donc

$$\dot{z} + \tfrac{n}{\kappa r}z = \tfrac{\psi}{r}z^{(1-\kappa)}.$$

On multiplie l'équation par $z^{\kappa-1}$ et on fait le changement de fonctions :

$$y(r) = z^{\kappa}(r)$$

on obtient

$$\dot{y} + \tfrac{n}{r}y = \tfrac{\kappa\psi}{r}.$$

Pour résoudre cette équation on va prendre premièrement la partie homogène :

$$\dot{y} + \tfrac{n}{r}y = 0 \Rightarrow \tfrac{dy}{y} = -n\tfrac{dr}{r} \Rightarrow \log\tfrac{y}{\beta} = \log r^{-n}$$

soit :

$$y(r) = \beta r^{-n}.$$

Pour trouver la solution générale de l'équation, on utilise la méthode de variation de la constante :

$$\dot{\beta}(r)r^{-n} = \tfrac{\kappa\psi}{r} \Rightarrow \dot{\beta}(r) = \kappa\psi r^{n-1} \Rightarrow \beta(r) = \kappa\int_0^r \psi t^{n-1}dt$$

donc

$$y(r) = \beta r^{-n} + \kappa r^{-n}\int_0^r \psi(t)t^{n-1}dt\ .$$

On prend $\beta = 0$ pour éviter une singularité car on impose $\dot{U}(0) = 0$ pour avoir $u(x) = U(r)$ régulière à l'origine et on fait le changement de variable $\tau = \frac{t}{r}$. On obtient,

$$y(r) = \kappa\int_0^1 \psi(\tau r)\tau^{n-1}d\tau$$

Comme $y(r) = z^{\kappa}(r)$ on a :

$$z(r) = \left(\kappa\int_0^1 \psi(\tau r)\tau^{n-1}d\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}},$$

et comme : $z(r) = \frac{v(r)}{r} + 1$ on trouve pour v :

$$\begin{aligned}
v(r) &= r\left[\left(\kappa\int_0^1 \psi(\tau r)\tau^{n-1}d\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right]\\
&= r\left[\left(\kappa\int_0^1 \tfrac{n}{\kappa}(1+\varphi(\tau r))\tau^{n-1}d\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right]\\
&= r\left[\left(\int_0^1 \left(n\tau^{n-1} + n\varphi(\tau r)\tau^{n-1}\right)d\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right],
\end{aligned}$$

soit finalement :

$$v(r) = r\left[\left(1 + n\int_0^1 \varphi(\tau r)\tau^{n-1}d\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right]. \tag{7.2}$$

Comme $v(r) = \dot{U}(r)$ on trouve pour U :

$$U(r) = \int_0^r v(t)dt + C$$

On veut aussi :
$U(\infty) = 0 \Rightarrow \int_0^\infty v(t)dt + C = 0 \Rightarrow C = -\int_0^\infty v(t)dt.$
Finalement : $U(r) = \int_0^r v(t)dt - \int_0^\infty v(t)dt = -\int_r^\infty v(t)dt$ soit encore :

$$U(r) = -\int_r^\infty s\left[\left(1 + n\int_0^1 \varphi(\tau s)\tau^{n-1}d\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right]ds$$

■

7.2 Estimation d'ordre zéro pondérée

Pour construire une telle estimation sur u_t solution de l'équation (5.3) générale (sans radialité), nous allons procéder en comparant u_t à des solutions supérieure u^+ et inférieure $u^- \leq u^+$ radiales auxquelles s'appliquera la proposition suivante :

Proposition 7.2 *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ solution nulle à l'infini de l'équation (5.2) avec : $\phi(x) = \varphi(r)$, $\phi \in C^0_{p+2}$ et $p \in (0, n-2), 1 + \phi > 0$. Alors $u(x) = U(r)$ et $u \in C^0_p$; précisément on a :*

$$\|u\|_{C^0_p} \leq n[p(n-2-p)]^{-1}\|\phi\|_{C^0_{p+2}}$$

Admettant cette proposition provisoirement, appliquons-la.

Construction de u^- : Comme $\phi \in C^0_{p+2}$, il existe une constante $C^- > 0$ telle que :

$$\forall\, t \in [0,1], 1 + t\phi \leq 1 + C^-\sigma(r)^{-p-2} := 1 + \phi^-.$$

Soit u^- la solution radiale formelle de l'équation : $\mathcal{N}_\kappa[u^-] = \log(1 + \phi^-)$ donnée par la Proposition 7.1. On a $u^- \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap C^0_p$ d'après la Proposition 7.2, avec ici :

$$\|u^-\|_{C^0_p} \leq n[p(n-2-p)]^{-1}C^-.$$

Construction de u^+ : Comme $\phi \in C^0_{p+2}$ avec $1+\phi > 0$, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$\forall\, t \in [0,1],\ \log(1+t\phi) \geq -C_1\sigma^{-p-2}$$

et vérifiant :

$$\phi^+ := \left[\exp\left(-C_1\sigma(r)^{-p-2}\right) - 1\right] \ \in C^0_{p+2}.$$

Posons $C^+ = \|\phi^+\|_{C^0_{p+2}}$ et soit u^+ la solution radiale formelle de l'équation $\mathcal{N}_\kappa[u^+] = \log(1+\phi^+)$ donnée par la Proposition 7.1. On a $u^+ \in C^2(\mathbb{R}^n)\cap C^0_p$ d'après la Proposition 7.2 avec ici :

$$\|u^+\|_{C^0_p} \leq n[p(n-2-p)]^{-1}C^+.$$

On a par construction :

$$1+\varphi^+ = \mathcal{N}_\kappa[u^+] \leq \mathcal{N}_\kappa[u_t] = 1+t\phi \leq \mathcal{N}_\kappa[u^-] = 1+\varphi^-$$

donc pour appliquer le Lemme 3.1 (principe de comparaison) aux deux inégalités $\mathcal{N}_\kappa[u_t] \leq \mathcal{N}_\kappa[u^-]$ et $\mathcal{N}_\kappa[u^+] \leq \mathcal{N}_\kappa[u_t]$, il nous reste à vérifier que u^- et u^+ sont κ-admissibles. En l'admettant provisoirement, on déduit du Lemme 3.1 l'encadrement :

$$u^- \leq u \leq u^+$$

et d'après la Proposition 7.2 on obtient l'estimation pondérée objet de cette section :

$$\sigma(x)^p|u(x)| \leq n[p(n-2-p)]^{-1}\max(C^-, C^+).$$

κ-admissibilité de u^+ et u^- :

L'idée est la suivante : si une fonction $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ est κ-admissible en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et si elle vérifie $\sigma_\kappa[\lambda(a_v)] > 0$ sur $\mathbb{R}^n$, alors v est partout κ-admissible. En effet, l'ouvert

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \lambda(a_v)(x) \in \Gamma_\kappa\}$$

contient x_0 et en tout point x adhérent à V, on a $\lambda(a_v)(x) \in \bar{\Gamma}_\kappa$ avec par hypothèse $\sigma_\kappa[\lambda(a_v)](x) > 0$. Les inégalités de Mac-Laurin impliquent $x \in V$, donc V est fermé et, par connexité, $V = \mathbb{R}^n$.
Appliquons ce principe à $v = u^\pm$ en choisissant (à cause de la radialité) le point $x_0 = 0$, où $du^\pm(0) = 0$.

Pour la κ-admissibilité de u^- en 0, on a $\mathcal{N}_\kappa[u^-] = \log(1 + C^-\sigma^{-p-2}),\quad C^- > 0$, et l'équation (7.1) fournit pour $U^-(r) = u^-(x)$ en $r = 0$ la relation $\ddot{U}^-(0) = (1 + C^-)^{\frac{1}{\kappa}} - 1 =: c^- > 0$, avec $\dot{U}^-(0) = 0$. En calculant la limite pour $r \to 0$ de l'expression :

$$\partial_{ij} u^- = \tfrac{x_i x_j}{r^2} \left(\ddot{U}^- - \tfrac{\dot{U}^-}{r} \right) + \delta_{ij} \tfrac{\dot{U}^-}{r}$$

on trouve :

$$\partial_{ij} u^-(0) = \delta_{ij} \ddot{U}^-(0) = c^- \delta_{ij}$$

Donc $\lambda(a_{u^-})(0) = (c^-, \ldots, c^-) \in \Gamma_\kappa$.

Pour u^+, solution radiale de l'équation $\mathcal{N}_\kappa[u^+] = -C_1 \sigma^{-p-2}$ avec $C_1 > 0$, on trouve : de même : $\lambda(a_{u^+})(0) = (c^+, \ldots, c^+)$ avec $c^+ := \exp(-\frac{C_1}{\kappa}) > 0$ donc $\lambda(a_{u^+})(0) \in \Gamma_\kappa$.

Preuve de la Proposition 7.2 D'après la Proposition 7.1, $u(x) = U(r)$, s'écrit :

$$U(r) = -\int_r^\infty s \left[\left(1 + n \int_0^1 \varphi(\tau s) \tau^{n-1} d\tau \right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1 \right] ds$$

Nous allons supposer provisoirement une inégalité-clef démontrée ci-après, à savoir :

$$r^{p+1} |v(r)| \leq \frac{n}{(n-2-p)} \|\phi\|_{C^0_{p+2}}. \tag{7.3}$$

De cette inégalité, on déduit immédiatement :

$$|U(r)| \leq \int_r^\infty |v(s)| ds \leq \frac{n}{p(n-2-p)} \|\phi\|_{C^0_{p+2}} r^{-p}$$

la proposition est donc démontrée, moyennant la preuve de (7.3).

■

Pour établir (7.3) nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 7.2 *$\forall\ (x, \alpha) \in [-1, \infty) \times (0, 1)$ on a $|(1 + x)^\alpha - 1| \leq |x|$.*

Preuve : $\forall (x, \alpha) \in [-1, \infty) \times (0, 1)$ on a $|(1 + x)^\alpha - 1| \leq |x|$

On a $|(1 + x)^\alpha - 1| = \begin{cases} -(1 + x)^\alpha + 1 & si \quad x \in [-1, 0] \\ (1 + x)^\alpha - 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Si $x \in [-1, 0]$ on a $(1 + x)^\alpha \geq\ 1 + x \quad \forall \quad \alpha\ \in (0, 1)$ donc $-(1 + x)^\alpha + 1 \leq -x$

Si $x \geq 0$ on a $(1 + x)^\alpha \leq 1 + x \quad \forall \quad \alpha\ \in (0, 1)$ alors $(1 + x)^\alpha - 1 \leq x$.

■

Preuve de l'inégalité (7.3) D'après le Lemme 7.1 la fonction u nulle à l'infini doit être radiale par unicité, d'après (7.2) on a,

$$r^{-1}|v(r)| = \left|(1+n\int_0^1 \varphi(\tau r)\tau^{n-1}d\tau)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right|.$$

En appliquant le lemme précédent avec

$$\alpha = \frac{1}{\kappa} \text{ } et \text{ } x = n\int_0^1 |\varphi(\tau r)\tau^{n-1}|d\tau$$

on obtient,

$$\begin{aligned}
r^{-1}|v(r)| &\leq n\int_0^1 |\varphi(\tau r)\tau^{n-1}|d\tau \\
&\leq n\int_0^1 |\varphi(\tau r)|(1+(\tau r)^2)^{\frac{(p+2)}{2}}(1+(\tau r)^2)^{\frac{-(p+2)}{2}}\tau^{n-1}d\tau \\
&\leq n\|\varphi\|_{C^0_{p+2}}\int_0^1 (1+(\tau r)^2)^{\frac{-(p+2)}{2}}\tau^{n-1}d\tau \\
&\leq n\|\varphi\|_{C^0_{p+2}}\int_0^1 (\tau r)^{-(p+2)}\tau^{n-1}d\tau \quad \text{car pour } q>0,\ (1+\tau^2)^{\frac{-q}{2}} < |\tau|^{-q}
\end{aligned}$$

Finalement, comme $p \in (0, n-2)$, on a

$$r^{-1}|v(r)| \leq \frac{n}{(n-2-p)}\|\phi\|_{C^0_{p+2}} r^{-(p+2)}$$

donc aussi :

$$r^{p+1}|v(r)| \leq \frac{n}{(n-2-p)}\|\phi\|_{C^0_{p+2}}$$

■

7.3 Estimation d'ordre deux sans poids et ellipticité uniforme

Estimation de $|D^2u_t|$ d'après [4].

On va procéder en deux étapes. La première sera la démonstration du :

Lemme 7.3 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de $t \in [0,1]$ telle que, pour tout vecteur unitaire ξ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\partial_{\xi\xi}u_t(x) \leq C.$$

Preuve : Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\xi| = 1$ et on note par $\partial_\xi = \sum \xi_i \partial_{x_i}$.

En appliquant ∂_ξ deux fois à l'équation (5.4), et en posant $N_\kappa := \log(\tilde{F}_\kappa)$, on trouve :

$$\frac{\partial N_\kappa}{\partial a_{ij}} \partial_\xi (u_t)_{ij} = \partial_\xi \log(\psi_t) \tag{7.4}$$

$$\frac{\partial^2 N_\kappa}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} \partial_\xi (u_t)_{ij} \partial_\xi (u_t)_{kl} + \frac{\partial N_\kappa}{\partial a_{ij}} \partial_{\xi\xi} (u_t)_{ij} = \partial_{\xi\xi} \log(\psi_t) \tag{7.5}$$

où $\psi_t = 1 + t\phi$. Donc d'après la concavité de N_κ on en déduit de (7.5)

$$\frac{\partial N_\kappa}{\partial a_{ij}} \partial_{\xi\xi} (u_t)_{ij} \geq \partial_{\xi\xi} \log(\psi_t)$$

ou encore :

$$L(\partial_{\xi\xi} u_t) \geq \partial_{\xi\xi} \log(\psi_t). \tag{7.6}$$

en notant ci-après L l'opérateur linéaire elliptique défini par :

$$Lv := \frac{\partial N_\kappa}{\partial a_{ij}} (a_{u_t}) v_{ij}$$

On diagonalise $D^2 u_t(x)$, on pose $((\lambda_t)_i = 1 + (u_t)_{ii})$, et on utilise la Proposition 2.1 et la formule suivante :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_j} = (n - \kappa + 1)\sigma_{\kappa-1},$$

on obtient :

$$Lu_t = \frac{1}{\sigma_\kappa} \sum_i \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_i} ((\lambda_t)_i - 1) = \kappa - (n - \kappa + 1)\frac{\sigma_{\kappa-1}}{\sigma_\kappa}. \tag{7.7}$$

En utilisant les inégalités de Newton pour les fonctions élémentaires symétriques dans Γ_κ, alors $\forall\ j \in \{1, \dots, \kappa - 1\}$:

$$\tilde{\sigma}_{j-1}\tilde{\sigma}_{j+1} \leq \tilde{\sigma}_j^2 \quad \text{alors} \quad \frac{\sigma_{j-1}}{\binom{n}{j-1}} \frac{\sigma_{j+1}}{\binom{n}{j+1}} \leq \frac{\sigma_j^2}{\binom{n}{j}^2},$$

donc

$$q_j := \frac{n - (j-1)}{j} \frac{\sigma_{j-1}}{\sigma_j} \leq \frac{n - j}{j + 1} \frac{\sigma_j}{\sigma_{j+1}} := q_{j+1}$$

Soit $w_t(x, \xi) = \partial_{\xi\xi} u_t - u_t,\ x \in \mathbb{R}^n$.

Si $w_t(x, \xi) \leq 0$ alors $\partial_{\xi\xi} u_t \leq c$, sinon, comme $w_t(x, \xi) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$, alors w_t atteint un maximum positif M au point (x_0, ξ_0).

On peut prendre $\xi_0 = e_1$ et compléter ξ_0 par une base orthonormé $e_2, \ldots, e_n$ qui diagonalise $(u_t)_{ij}(x_0)$. En effet, on a :

$$\frac{d}{ds} w_t(x_0, \xi_0 + s\eta)|_{s=0} = 0 \ (\forall\ \eta \perp \xi_0)(\text{point critique}) \Rightarrow \partial^2_{1j} u_t(x_0) = 0\ \forall\ j > 1.$$

Par ailleurs, pour tout $\xi = \dfrac{\xi_0 + s\eta}{|\xi_0 + s\eta|}$ avec η unitaire et $\eta \perp \xi_0$

$$(\partial_{\xi\xi} u_t - u_t)(x_0) \leq (\partial_{\xi_0\xi_0} u_t - u_t)(x_0),$$

donc, près de x_0, on prend la fonctionnelle auxiliaire :

$$\tilde{w}_t(x) = (u_t)_{11} - u_t$$

laquelle atteint aussi un maximum local égal au même $M > 0$ en x_0 où $L\tilde{w}_t \leq 0$. D'après (7.6) et (7.7), l'inégalité $L\tilde{w}_t \leq 0$ entraine au point x_0 :

$$(\log(\psi_t))_{11} - \kappa + (n - \kappa + 1)\frac{\sigma_{\kappa-1}}{\sigma_\kappa} \leq 0$$

donc en x_0, on a :

$$q_\kappa \leq 1 - \frac{1}{\kappa}(\log(\psi_t))_{11} \leq c. \tag{7.8}$$

avec c indépendante de $t \in [0, 1]$. Comme la suite $(q_j)_j$ est croissante, on obtient

$$c \geq \tfrac{n-(\kappa-1)}{\kappa}\ \tfrac{\sigma_{\kappa-1}}{\sigma_\kappa} = q_\kappa \geq q_{\kappa-1} \geq \ldots \geq q_2 = \tfrac{n-1}{2}\ \tfrac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

On a $\sigma_{\kappa-1} = \dfrac{\kappa}{n-(\kappa-1)}\sigma_\kappa\ q_\kappa$ et

$$\begin{cases} \sigma_1 \leq \dfrac{2}{(n-1)}\sigma_2\ q_3 \\ \sigma_2 \leq \dfrac{3}{(n-2)}\sigma_3\ q_4 \\ \vdots \\ \sigma_{\kappa-2} \leq \dfrac{\kappa-1}{(n-(\kappa-2))}\sigma_{\kappa-1}\ q_\kappa \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq \frac{2}{(n-1)}\ q_3 \frac{3}{(n-2)}\ q_4 \frac{4}{(n-3)}\ q_5 \cdots \frac{\kappa-1}{(n-(\kappa-2))}\ q_\kappa \sigma_{\kappa-1}\ q_\kappa \\ &\leq \frac{2}{(n-1)}\frac{3}{(n-2)}\frac{4}{(n-3)}\cdots\frac{\kappa-1}{(n-(\kappa-2))}\frac{\kappa}{(n-(\kappa-1))}\ \sigma_\kappa\ q_3 q_4 \ldots\ q_{\kappa-1} q_\kappa q_\kappa \\ &\leq \frac{\kappa!\ (n-\kappa)!}{(n-1)!}\sigma_\kappa q_\kappa^{\kappa-1} \end{aligned}$$

donc finalement, on obtient d'après (7.8) au point x_0

$$\sigma_1 \leq \frac{\kappa!\ (n-\kappa)!}{(n-1)!} \binom{n}{\kappa} \psi_t\ c^{\kappa-1} = n\ \psi_t\ c^{\kappa-1} \leq C.$$

avec C indépendante de $t \in [0,1]$. On a

$$\sum (\lambda_t)_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \leq \sigma_1^2 \quad dans \quad \Gamma_\kappa\ (\kappa \geq 2)$$

Donc $\forall\ i, |(\lambda_t)_i| \leq \sigma_1 \Rightarrow \forall\ i, |1 + (u_t)_{ii}| \leq C \Rightarrow |(u_t)_{ii}| \leq C + 1$

alors il existe une autre constante C indépendante de (x, ξ) et $t \in [0,1]$ telle que

$$M = \tilde{w}_t(x_0) \leq C$$

et par définition de M (voir plus haut) il existe donc une autre constante C, telle que : $\forall\ |\xi| = 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ t \in [0,1]$,

$$\partial_{\xi\xi} u_t(x) \leq C.$$

■

Passons à la deuxième étape :

Lemme 7.4 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de $t \in [0,1]$ telle que, pour tout vecteur unitaire ξ et tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\partial_{\xi\xi} u_t(x) \geq -C.$$

Preuve : Comme $u_t \in \Upsilon_\kappa$ on a :

$$\sigma_1 = n + \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} u_t > 0 \Rightarrow\ \forall\ i_0, \partial_{i_0 i_0} u_t > -n - \sum_{i_0 \neq i} \partial_{ii} u_t$$

donc, d'après le Lemme 7.3 on obtient :

$$\partial_{i_0 i_0} u_t \geq -n - (n-1)C.$$

Cette inégalité est bien sûr valide dans tout repère orthonormé. Le Lemme 7.4 est donc démontré.

■

En combinant cette minoration avec la majoration du Lemme 7.3, on obtient (avec une autre constante C) :

$\exists C,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, |\xi| = 1,\ \forall\, t \in [0,1],$

$$|\partial_{\xi\xi} u_t(x)| \leq C.$$

Pour finir, on prend

$$\partial_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_i \pm \partial_j) \text{ pour } i \neq j$$

et on conclut que :

Proposition 7.3 *$\exists C$ indépendante de $t \in [0,1]$ telle que :*

$$|(u_t)_{ij}| \leq C.$$

Remarque 7.1 *Supposons $(\lambda_t)_1 \geq (\lambda_t)_2 \geq \ldots \geq (\lambda_t)_n$; alors il existe $C > 0$ et $c \in \mathbb{R}$ indépendantes de $t \in [0,1]$ et de $x \in \mathbb{R}^n$ telles que :*

$$C \geq (\lambda_t)_1 \geq (\lambda_t)_2 \geq \ldots \geq (\lambda_t)_n \geq c. \tag{7.9}$$

Estimation de $|du_t|$ Bien que nous n'en aurons pas besoin par la suite, enregistrons ici une estimation uniforme sur $|du_t|$.

Lemme 7.5 *Il existe $\tilde{C} > 0$ indépendante de $t \in [0,1]$ telle que $|du_t| \leq \tilde{C}$.*

Preuve : On considère la fonctionelle $A(u_t) = \frac{1}{2}|du_t|^2 + (2-c)u_t$ où $c \leq 0$ est le minorant qui intervient dans (7.9). Si $A(u_t) \leq 0$, le lemme suit de l'estimation *a priori* sur $\|u_t\|_{C^0_p}$. Si le maximum M de $A(u_t)$ est positif, comme $A(u_t)$ est nulle à l'infini, $M > 0$ est atteint en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La condition de point critique $d[A(u_t)](x_0) = 0$ s'écrit en x_0 :

$$\forall\, i, \sum_k u_k u_{ki} + (2-c)u_i = 0 \Leftrightarrow \forall\, i, \sum_k [a_{ik}(u_t) - c\delta_{ik} + \delta_{ik}]u_k = 0.$$

D'après (7.9), on a :

$$a_{ik}(u_t) - c\delta_{ik} + \delta_{ik} \geq \delta_{ik}$$

donc la condition critique implique : $du(x_0) = 0$. Ainsi, on a :

$$A(u_t) \leq (2-c)u_t(x_0)$$

et donc, finalement :

$$|du_t| \leq \tilde{C} := 2\sqrt{(2-c)\|u_t\|_{C^0}}$$

(avec bien sûr $\|u_t\|_{C^0} \leq \|u_t\|_{C^0_p}$ qui est estimé)

$\blacksquare$

Ellipticité uniforme de l'équation de continuité (5.3)

Pour simplifier les notations on va ignorer t et on ecrit λ (resp u) à la place de λ_t (resp u_t). D'après le Lemme 2.2 (et la Remarque 2.4 du même chapitre), il suffit de démontrer :

Lemme 7.6 *Il existe ε, C tel que : $\forall\ t \in [0,1],\ \forall\ i \in \{1, \ldots, n\}, \forall\ x \in \mathbb{R}^n$*

$$0 < \varepsilon \leq \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_i} \left(\lambda \left[a_u(x)\right]\right) \leq C.$$

Preuve : Supposons que $(\lambda_t)_1 \geq (\lambda_t)_2 \geq \ldots \geq (\lambda_t)_n$. D'après la Remarque 2.3 on a :

$$\frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_1}(\lambda_t) \leq \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_2}(\lambda_t) \leq \ldots \leq \frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_n}(\lambda_t).$$

Donc il suffit de majorer $\dfrac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_n}(\lambda_t)$ et de minorer $\dfrac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_1}(\lambda_t)$. On commence par :

Majoration de $\dfrac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_n}(\lambda_t)$. On note par $\widehat{\lambda_i} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1} \ldots, \lambda_n)$. On a :

$$\frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_i} = \sigma_{\kappa-1}(\widehat{\lambda_i}), \tag{7.10}$$

donc par la Remarque 7.1, il existe une autre constante uniforme C telle que :

$$\frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_n}(\lambda_t) \leq C.$$

Définition 7.1 *Pout tout $l \leq n-1$, on désigne par :*

$$\Gamma_{l,i} = \{\widehat{\lambda_i} \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ tel que } \sigma_j(\widehat{\lambda_i}) > 0\ \forall\ j = 1, \ldots, l\}.$$

Minoration de $\dfrac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_1}(\lambda_t)$**.** On a $\sigma_\kappa(\lambda) = \lambda_1 \sigma_{\kappa-1}(\widehat{\lambda_1}) + \sigma_\kappa(\widehat{\lambda_1})$. En $\lambda = \lambda_t$, on va distinguer deux cas :

1- Si $\sigma_\kappa(\widehat{\lambda_1}) \leq 0 \Rightarrow \sigma_\kappa(\lambda) \leq \lambda_1 \sigma_{\kappa-1}(\widehat{\lambda_1})$, d'après (7.10) on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_1}(\lambda) \geq \frac{\sigma_\kappa}{\lambda_1}$$

donc d'après (7.9) et la Remarque 5.1,

$$\frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_1}(\lambda_t) \geq \frac{\binom{n}{\kappa}\psi_t}{C} \geq \varepsilon > 0.$$

2- Si $\sigma_\kappa(\widehat{\lambda}_1) > 0$,

D'après le Théorème 2.1 on a, $\forall\ \lambda \in \Gamma_\kappa,\ \forall\ i = \{1\dots,\kappa\}$

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda_1}(\lambda) > 0,$$

donc pour tout $i \in \{2,\dots,\kappa\}$ on a $\sigma_{i-1}(\widehat{\lambda}_1) > 0$ donc $\widehat{\lambda}_1 \in \Gamma_{\kappa-1,1}$ et d'après notre présente hypothèse on a aussi $\sigma_\kappa(\widehat{\lambda}_1) > 0$. D'où

$$\widehat{\lambda}_1 \in \Gamma_{\kappa,1}.$$

En utilisant l'inégalité de Mac-Laurin dans $\Gamma_{\kappa,1}$ on obtient :

$$(\tilde{\sigma}_\kappa)^{\frac{1}{\kappa}}(\widehat{\lambda}_1) \le (\tilde{\sigma}_{\kappa-1})^{\frac{1}{\kappa-1}}(\widehat{\lambda}_1)$$

ou encore

$$\sigma_\kappa(\widehat{\lambda}_1) \le \binom{n-1}{\kappa}\left[\frac{\sigma_{\kappa-1}}{\binom{n-1}{\kappa-1}}(\widehat{\lambda}_1)\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

donc, toujours en $\lambda = \lambda_t$:

$$\sigma_\kappa(\lambda) \le \sigma_{\kappa-1}(\widehat{\lambda}_1)\left(\lambda_1 + \frac{(n-\kappa)}{\kappa}\left[\frac{\sigma_{\kappa-1}(\widehat{\lambda}_1)}{\binom{n-1}{\kappa-1}}\right]^{\frac{1}{\kappa-1}}\right).$$

On distingue ici deux sous-cas :

1- Si $\dfrac{\sigma_{\kappa-1}(\widehat{\lambda}_1)}{\binom{n-1}{\kappa-1}} < 1$, on obtient en λ_t compte-tenu de la Remarque 5.1 :

$$0 < \varepsilon \le \frac{\sigma_\kappa(\lambda)}{\left(\frac{(n-\kappa)}{\kappa} + \lambda_1\right)} < \sigma_{\kappa-1}(\widehat{\lambda}_1).$$

2- Sinon on obtient en λ_t :

$$\binom{n-1}{\kappa-1} \le \sigma_{\kappa-1}(\widehat{\lambda}_1).$$

Donc le Lemme 7.6 est complètement démontré.

■

7.4 Estimations non linéaires pondérées

Nous allons utiliser le Lemme 4.1 joint à une technique de *scaling* pour obtenir nos estimations non linéaires pondérées.

Soit $u \in C^4_p(\mathbb{R}^n)$ admissible et supposons $\mathcal{N}_\kappa[u] = \log[\tilde{\sigma}_\kappa(\lambda(a_u))] = f \in C^2_{p+2}(\mathbb{R}^n)$. Etant donnés x_0 et ρ comme dans le Lemme 4.1, on définit sur B_ρ les deux fonctions suivantes :

$$u_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^p u(x) \ , \ f_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^{p+2}\mathcal{N}_\kappa[u](x)$$

toujours avec $X = \frac{x-x_0}{\sigma(x_0)}$.

Par hypothèse f_{x_0} est bornée dans $C^2(B_\rho)$ indépendamment de x_0, et u_{x_0} l'est dans $C^0(B_\rho)$ indépendamment de x_0, grâce à l'encadrement de u entre u^- et u^+.

En effet, d'après le Lemme 4.1, on a sur $B^{x_0}_\rho$:

$$\frac{1}{C_\rho}\|u^-\|_{C^0_p(\mathbb{R}^n)} \leq [\sigma(x_0)]^p u^-(x) \leq u_{x_0} \leq [\sigma(x_0)]^p u^+(x) \leq \frac{1}{c_\rho}\|u^+\|_{C^0_p(\mathbb{R}^n)}.$$

En outre, on a les identités suivantes :

$a_u(x) \equiv I + D^2u(x) \equiv I + \sigma(x_0)^{-(p+2)}\sigma(x_0)^{p+2}D^2u(x) \equiv I + [\sigma(x_0)]^{-(p+2)}D^2u_{x_0}(X)$

$f_{x_0} \equiv [\sigma(x_0)]^{p+2}\log\{\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda\left(I + [\sigma(x_0)]^{-(p+2)}D^2u_{x_0}\right)]\} =: \mathcal{N}_{x_0}[u_{x_0}]$.

On a :

$$d\mathcal{N}_{x_0}[u_{x_0}](v)(X) = \frac{\sum C_{\kappa-1}\left(\lambda(I+\sigma(x_0)^{-(p+2)}D^2u_{x_0}(X))\right)^i_j v_{ij}(X)}{\sigma_\kappa\left(\lambda(I+\sigma(x_0)^{-(p+2)}D^2u_{x_0}(X))\right)} = \frac{\sum C_{\kappa-1}\left(\lambda(a_u(x))\right)^i_j v_{ij}(X)}{\sigma_\kappa\left(\lambda(a_u(x))\right)}$$

En ce qui concerne l'opérateur auxiliaire $\mathcal{N}_{x_0}$ juste défini, considéré sur $B_\rho = \{|X| \leq \rho\}$, $\mathcal{N}_{x_0}$ est donc uniformément elliptique, concave à l'égard de $D^2u_{x_0}$.

Selon une estimation a priori intérieure non linéaire de Gilbarg-Trudinger (équation (17.42)[8] p.456) appliquée dans B_ρ à l'équation $\mathcal{N}_{x_0}[u_{x_0}] = f_{x_0}$, il existe des constantes C et $\alpha \in (0,1)$ dépendant seulement de n, λ et Λ telles que :

$$\|u_{x_0}\|^*_{C^{2,\alpha}(B_\rho)} \leq C\{\|f_{x_0}\|^*_{C^2(B_\rho)} + \|u_{x_0}\|^*_{C^2(B_\rho)}\}$$

avec

$$\|v\|^*_{C^{2,\alpha}(B_\rho)} = \|v\|^*_{C^2(B_\rho)} + \underset{x,x' \in B_\rho}{Sup}\, d^{2+\alpha}_{x,x'}\frac{|D^2v(x) - D^2v(x')|}{|x-x'|^\alpha}$$

$$\|v\|^*_{C^2(B_\rho)} = \sum_{i=0}^{2}\underset{x\in B_\rho}{Sup} d^2_x|D^iv(x)|,\ d_x = dist(x, \partial B_\rho), d_{x,x'} = \min(d_x, d_{x'})$$

D'après l'inégalité d'interpolation, Lemme 4.2 on a : $\forall\ \epsilon\ > 0,\ \exists C(\epsilon) > 0$,

$$\|u_{x_0}\|^*_{C^2(B_\rho)} \leq C(\epsilon)\|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)} + \epsilon\|u_{x_0}\|^*_{C^{2,\alpha}(B_\rho)}$$

donc

$$\|u_{x_0}\|^*_{C^{2,\alpha}(B_\rho)} \leq C\{\|f_{x_0}\|^*_{C^2(B_\rho)} + C(\epsilon)\|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)} + \epsilon\|u_{x_0}\|^*_{C^{2,\alpha}(B_\rho)}\}$$

d'où avec une autre constante uniforme C

$$\|u_{x_0}\|^*_{C^{2,\alpha}(B_\rho)} \leq C\{\|f_{x_0}\|^*_{C^2(B_\rho)} + \|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)}\}.$$

Si Ω borné, $\Omega' \subset\subset \Omega$, $\theta = dist(\Omega', \partial\Omega)$ et $\varrho = \frac{1}{2} diam \Omega$, alors pour toute fonction $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$

$$\min(1, \theta^{2+\alpha})\|v\|_{C^{2,\alpha}(\Omega')} \leq \|v\|^*_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \ et \ \|v\|^*_{C^2(\Omega)} \leq \max(1, 4\varrho^2)\|v\|_{C^2(\Omega)}$$

donc on obtient ici avec $\Omega = B_\rho$ et $\Omega' = B_{\rho/2}$ et avec une autre constante uniforme C dépendant de ϱ mais pas de x_0 :

$$\|u_{x_0}\|_{C^{2,\alpha}(B_{\rho/2})} \leq C\{\|f_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)} + \|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)}\}$$

Prenant le $\underset{x_0 \in \mathbb{R}^n}{Sup}$, nous obtenons (encore avec un autre uniforme constante C)

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}_p} \leq C\left\{\|\mathcal{N}_\kappa[u]\|_{C^2_{p+2}} + \|u\|_{C^0_p}\right\}.$$

Chapitre 8

Équations hessiennes complexes

8.1 Introduction

Soit $n > 1$ un entier. Dans ce chapitre, nous allons considérer les équations hessienne complexes dans tout $\mathbb{C}^n$:

$$m_\kappa[\lambda(\partial_{i\bar{j}} f(z))] = [1 + \phi(z, \bar{z})]^{\frac{1}{\kappa}} \tag{8.1}$$

où $\partial_{i\bar{j}} f(z) := \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(z)$ est une matrice hermitienne $n \times n$, la hessienne complexe de la fonction $f = \frac{1}{2}|z|^2 + u$ au point z, $|z|$ est la norme hermitienne de z dans $\mathbb{C}^n$ et $1 + \phi > 0$, les fonctions u et ϕ sont à valeurs réelles, avec u cherchée et ϕ donnée dans :

$$u \in C_p^{k+2,\alpha}, \ \ \phi \in C_{p+2}^{k,\alpha} \text{ avec } p \in (0, 2n-2) \tag{8.2}$$

où les espaces de Hölder à poids (voir section 4.2) sont ici relatifs à l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2n}$ sous-jacent à l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$. m_κ est la moyenne symétrique élémentaire d'ordre κ à $n \geq \kappa$ variables, homogène de degré 1 et $\lambda(\partial_{i\bar{j}} f)$ désigne le n-uplet des valeurs propres de la matrice hessienne complexe de f par rapport à la *métrique hermitienne standard* de $\mathbb{C}^n$.

Le cas $\kappa = n$ (Monge-Ampère complexe) a été traité dans [6]. Notre contribution concerne le cas $1 < \kappa < n$. Dans ce cas, le problème de Dirichlet posé dans un ouvert borné (de géométrie convenable) a été traité pour notre équation dans l'article [11].

Remarque 8.1 On a prouvé dans le Chapitre 2 que m_κ est une fonction symétrique, elliptique, concave, dans le cône convexe Γ_κ où :

$$\Gamma_\kappa = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \sigma_j(\lambda) > 0,\ \forall\ j = 1 \ldots \kappa\}.$$

8.2 Fonctions κ-admissibles

Le but de cette section est de démontrer que le linéarisé de l'opérateur (en la fonction u) associé à l'équation (8.1) vérifie les hypothèses du Lemme 4.4 pour appliquer le théorème d'isomorphisme (voir plus loin 8.2.2).

8.2.1 L'opérateur différentiel $\mathfrak{F}_\kappa$ et ses premières propriétés

Soit $M = (m_{i\bar{j}})_{i\bar{j}}$ une matrice hermitienne $n \times n$ et $\kappa \in \{1, \ldots, n\}$ fixé.

Définition 8.1 $\mathrm{F}_\kappa(M) = \sum_{|I|=\kappa} M_{II}$, *la somme des mineurs principaux d'ordre κ de M.*

On notera par :

$$\tilde{\mathrm{F}}_\kappa(M) = \frac{1}{\binom{n}{\kappa}} \mathrm{F}_\kappa(M)$$

On désigne par $\partial_{i\bar{j}} u$ la matrice hessienne complexe de la fonction à valeurs réelle $u \in C^2(\mathbb{C}^n)$, et par $M_u := I + \partial_{i\bar{j}} u$

Définition 8.2 *Soit $\mathfrak{F}_\kappa$ l'opérateur différentiel défini sur $C^2(\mathbb{C}^n)$, par :*

$$u \mapsto \mathfrak{F}_\kappa[u] := \mathrm{F}_\kappa(M_u).$$

On notera par :

$$\tilde{\mathfrak{F}}_\kappa[u] = \frac{1}{\binom{n}{\kappa}} \mathfrak{F}_\kappa[u]$$

On désigne par $\dfrac{\partial \mathrm{F}_\kappa}{\partial m_{i\bar{j}}}$ la dérivée partielle de F_κ par rapport à $m_{i\bar{j}}$, et on pose :

$$C_{\kappa-1} \left(M_u\right)_{i\bar{j}} = \frac{1}{(\kappa-1)!} \sum \varepsilon^{i_1 \ldots i_{\kappa-1} i}_{\bar{j}_1 \ldots \bar{j}_{\kappa-1} \bar{j}}\ m_{i_1 \bar{j}_1} \ldots m_{i_{\kappa-1} \bar{j}_{\kappa-1}} \tag{8.3}$$

alors : $\dfrac{\partial \mathrm{F}_\kappa}{\partial m_{i\bar{j}}}(M_u) = C_{\kappa-1}\left(M_u\right)_{i\bar{j}}$. Pour simplifier l'écriture on note par $C_{i\bar{j}} \equiv C_{\kappa-1}\left(M_u\right)_{i\bar{j}}$.

Pour $z \in \mathbb{C}^n$, on écrit $z \equiv (z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + \boldsymbol{i} x_{n+1}, x_2 + \boldsymbol{i} x_{n+2}, \ldots, x_n + \boldsymbol{i} x_{2n})$. Comme

$(C_{i\bar{j}})_{i\bar{j}}$ est une matrice hermitienne, $C_{i\bar{j}} = 1/2(C_{i\bar{j}}+C^*_{i\bar{j}})+1/2(C_{i\bar{j}}-C^*_{i\bar{j}})$ (où $(C^*_{i\bar{j}})_{i\bar{j}}$ est la transposée de la matrice $(C_{i\bar{j}})_{i\bar{j}}$), on peut l'écrire sous forme $A+\boldsymbol{i}B$ où $A \equiv (A_{i\bar{j}})_{i\bar{j}}$ est une matrice symétrique réelle et $B \equiv (B_{i\bar{j}})_{i\bar{j}}$ est une matrice antisymétrique réelle.

On a $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\right)$, donc, par un calcul simple, on peut écrire $u_{i\bar{j}}$ sous la forme :

$$u_{i\bar{j}} = \tfrac{1}{4}\left(u_{ij} + u_{n+i,n+j} + \boldsymbol{i}(u_{i,n+j} - u_{n+i,j})\right), \ \forall\, i,j = 1,\ldots,n. \tag{8.4}$$

où figurent à droite certaines dérivées réelles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^I \partial x^J}$ avec $1 \le I, J \le 2n$.

Définition 8.3 *Pour $1 \le I,J \le 2n$, $1 \le i,j \le n$ où $I \in \{1,\ldots,i\ldots,n+i,\ldots\ 2n\}$, $J \in \{1,\ldots,j,\ldots,n+j,\ldots,2n\}$ on définit $\mathcal{C}_{IJ}$ par :*

$$C_{i\bar{j}}\partial_{i\bar{j}} = \mathcal{C}_{IJ}\partial_{IJ}$$

où figurent à droites des dérivées réelles $\partial_{IJ} = \frac{\partial^2}{\partial x^I \partial x^J}$.

Proposition 8.1 *On a :*

$$\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}_{n+i,n+j} = \tfrac{1}{4}A_{i\bar{j}} \ \textit{et} \ \ \mathcal{C}_{i,n+j} = -\mathcal{C}_{n+i,j} = -\tfrac{1}{4}B_{i\bar{j}}$$

Preuve : D'après l'équation (8.4), on a :

$$\begin{aligned}\sum C_{i\bar{j}}\partial_{i\bar{j}}u &= \frac{1}{4}\sum (A_{i\bar{j}} + \boldsymbol{i}B_{i\bar{j}})\left(u_{ij} + u_{n+i,n+j} + \boldsymbol{i}(u_{i,n+j} - u_{n+i,j})\right)\\ &= \frac{1}{4}\sum \left[A_{i\bar{j}}(u_{ij} + u_{n+i,n+j}) - B_{i\bar{j}}(u_{i,n+j} - u_{n+i,j})\right]\end{aligned}$$

(les autre termes s'annulent car A est symétrique et B est antisymétrique). La proposition s'ensuit d'après la Définition 8.3.

Lemme 8.1

$$\sum_i \partial_i\left(C_{i\bar{j}}\right) = 0 \ \ \forall\ \bar{j} = 1,\ldots,n.$$

Preuve : $\sum_i \partial_i\left(C_{i\bar{j}}\right) = \sum_i \frac{1}{(\kappa-1)!}\sum \varepsilon^{i_1\ldots i_{\kappa-1}i}_{\bar{j}_1\ldots\bar{j}_{\kappa-1}\bar{j}}\ \partial_i(m_{i_1\bar{j}_1}\ldots m_{i_{\kappa-1}\bar{j}_{\kappa-1}})$

Chaque $m_{i_r\bar{j}_r i}$ est symétrique en $i_r i$; tandis que le symbole de Kronecker est antisymétrique en $i_r i$, on obtiendra zéro.

∎

On a : $\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right),\ \ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} = \frac{1}{\boldsymbol{i}}\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial}{\partial z_i}\right).$

En utilisant la Proposition 8.1 et le Lemme 8.1 on a :

Lemme 8.2 *Pour tout $j = 1, \ldots, n$*

$$\sum_I \partial_I \mathcal{C}_{Ij} = \sum_I \partial_I \mathcal{C}_{I,n+j} = 0$$

Preuve :

$$\sum_I \partial_I \mathcal{C}_{Ij} = \frac{1}{4}\left(\sum_{I=1}^{n} \partial_I A_{I\bar{j}} + \sum_{I=n+1}^{2n} \partial_I B_{I-n,\bar{j}}\right) = \frac{1}{4}\sum_i \left(\partial_i A_{i\bar{j}} + \partial_{\bar{i}} A_{i\bar{j}}\right) + \frac{1}{4\boldsymbol{i}}\sum_i \left(\partial_{\bar{i}} B_{i\bar{j}} - \partial_i B_{i\bar{j}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\sum_i \left(\partial_i C_{i\bar{j}} + \partial_{\bar{i}} \overline{C_{i\bar{j}}}\right) = \frac{1}{4}\sum_i \left(\partial_i C_{i\bar{j}} + \overline{\partial_i C_{i\bar{j}}}\right) = 0$$

$$\sum_I \partial_I \mathcal{C}_{I,n+j} = \frac{1}{4}\left(-\sum_{I=1}^{n} \partial_I B_{I\bar{j}} + \sum_{I=n+1}^{2n} \partial_I A_{I-n,\bar{j}}\right)$$
$$= \frac{-1}{4}\sum_i \left(\partial_i B_{i\bar{j}} + \partial_{\bar{i}} B_{i\bar{j}}\right) + \frac{1}{4\boldsymbol{i}}\sum_i \left(\partial_{\bar{i}} A_{i\bar{j}} - \partial_i A_{i\bar{j}}\right)$$
$$= \frac{\boldsymbol{i}}{4}\sum_i \left(\partial_i C_{i\bar{j}} - \partial_{\bar{i}} \overline{C_{i\bar{j}}}\right) = \frac{\boldsymbol{i}}{4}\sum_i \left(\partial_i C_{i\bar{j}} - \overline{\partial_i C_{i\bar{j}}}\right) = 0$$

■

Du Lemme 8.2 résulte immédiatement le :

Corollaire 8.1 *Pour tout $J = 1, \ldots, 2n$,*

$$\sum_I \partial_I \mathcal{C}_{IJ} = 0.$$

D'après le Corollaire 8.1 on obtient :

Corollaire 8.2 *Le linéarisé $d\mathfrak{F}_\kappa[u] \equiv d\mathrm{F}_\kappa[M_u]$ de $\mathfrak{F}_\kappa$ en u est une divergence ;*

$$d\mathfrak{F}_\kappa[u](v) = \sum_{i,j} C_{i\bar{j}} \partial_{i\bar{j}} v = \sum_{IJ} \mathcal{C}_{IJ} \partial_{IJ} v = \sum_I \partial_I \left(\sum_J \mathcal{C}_{IJ} \partial_J v\right).$$

8.2.2 Fonctions κ-admissibles, ellipticité et inversibilité locale de l'opérateur $\mathfrak{F}_\kappa$

Définition 8.4 *Une fonction $u \in C^2$ est dite κ-admissible si $\lambda(M_u)(z) \in \Gamma_\kappa$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n$. On notera par $\mathcal{A}^2$ le sous ensemble ouvert de $C^2(\mathbb{C}^n)$ des fonctions κ-admissibles sur $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{A}_p^{k+2,\alpha} := \mathcal{A}^2 \cap C_p^{k+2,\alpha}$. Pour $u \in \mathcal{A}^2$, on notera par :*

$$\mathrm{N}_\kappa[u] := \log[\tilde{\mathrm{F}}_\kappa(M_u)].$$

Proposition 8.2 (Propriétés de $\mathcal{C}_{IJ}$)

1. *Pour* $1 \leq I, J \leq 2n$, *on a* $\mathcal{C}_{IJ} \in C_0^{k,\alpha}(\mathbb{C}^{2n})$.
2. *Pour* $p > 0$ *et* $u \in \mathfrak{a}_p^2$ *fixé, il existe* $0 < \lambda < \Lambda$ *tel que* $\forall\ z \in \mathbb{C}^n$ *on a :*

$$\lambda\delta_{IJ} \leq \mathcal{C}_{IJ} \leq \Lambda\delta_{IJ}.$$

Preuve : D'après l'équation (8.3) et la Proposition 8.1, on peut écrire $\mathcal{C}_{IJ}$ sous la forme $\mathcal{C}_{IJ} = \delta_{IJ} + \gamma_{IJ}$ où $\gamma_{IJ} \in C_{p+2}^{k,\alpha}$.
Soit $z \in \mathbb{C}^n, \lambda(M_u) \in \Gamma_\kappa$ donc par une transformation unitaire qui diagonalise $\partial_{i\bar{j}}u(z)$ on en déduit qu'au point z on a : $C_{i\bar{j}} = \delta_{ij}\dfrac{\partial\sigma_\kappa}{\partial\lambda_i}[\lambda(M_u)]$. Donc $C_{i\bar{j}}$ est défini positif. Montrons à présent que $\mathcal{C}_{IJ}$ est aussi défini positif en démontrant l'identité :

$$C_{i\bar{j}}\xi_i\bar{\xi}_j = 4\mathcal{C}_{IJ}\zeta_I\zeta_J \tag{8.5}$$

où l'on pose : $\forall\ j = 1, \ldots, n,\ \xi_j = \zeta_j - \boldsymbol{i}\zeta_{n+j}$. Grâce à (8.5) la preuve de la seconde assertion de la Proposition 8.2 est maintenant équivalente à l'ellipticité uniforme qui se démontre comme au Corollaire 8.5 (voir plus loin) de l'opérateur $\mathfrak{F}_\kappa[u]$. On aura donc $0 < \lambda < \Lambda$ t.q.

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{ij} C_{i\bar{j}}\xi_i\bar{\xi}_j \leq \Lambda|\xi|^2.$$

Preuve de (8.5) : On a :
$\sum_{i,j} C_{i\bar{j}}\xi_i\bar{\xi}_j = \sum_{i,j}(A_{i\bar{j}} + \boldsymbol{i}B_{i\bar{j}})(\zeta_i\zeta_j + \zeta_{n+i}\zeta_{n+j} + \boldsymbol{i}(\zeta_i\zeta_{n+j} - \zeta_{n+i}\zeta_j))$ donc, d'après la Proposition 8.1, on obtient : $\sum_{ij} C_{i\bar{j}}\xi_i\bar{\xi}_j = 4\sum_{IJ} \mathcal{C}_{IJ}\zeta_I\zeta_J$

Corollaire 8.3 *L'ellipticité de* $\mathfrak{F}_\kappa$ *sur* $\mathfrak{a}_p^{k+2,\alpha}$ *peut être lue en chaque point* z *après une transformation unitaire qui diagonalise* $\partial_{i\bar{j}}u$

Théorème 8.1 *Soit* $k \in \mathbb{N}, p \in (0, 2n-2)$ *et* $u \in \mathfrak{a}_p^{k+2,\alpha}$, *alors :*

$$d\mathrm{N}_\kappa[u] : C_p^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_{p+2}^{k,\alpha}$$

est un isomorphisme.

Preuve : D'après le Corollaire 8.2 on a :

$$d\mathfrak{F}_\kappa[u](v) = \sum_I \partial_I\left(\sum_J C_{IJ}\partial_J v\right),$$

donc

$$d\mathrm{N}_\kappa[u](v) = \frac{\sum_I \partial_I\left(\sum_J C_{IJ}\partial_J v\right)}{\sigma_\kappa(\lambda(M_u))}.$$

Pour tout $u \in \mathfrak{a}_p^{k+2,\alpha}$ d'après le Corollaire 8.3 $d\mathfrak{F}_\kappa[u]$ est elliptique, par hypothèse on a $\sigma_\kappa(\lambda(M_u)) > 0$, d'où comme au Lemme 6.2 on obtient le résultat.

8.3 Unicité de la solution κ-admissible nulle à l'infini

Lemme 8.3 (Principe de comparaison) *Soient $u, v \in \mathcal{a}^2(\mathbb{C}^n)$ et tendant vers zéro à l'infini telles que :*

$$\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(M_u)] \leq \tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(M_v)] \text{ dans } \mathbb{C}^n.$$

Alors

$$u \geq v \text{ dans } \mathbb{C}^n.$$

La preuve est analogue au cas réel (voir Lemme 3.1). On en déduit immédiatement :

Corollaire 8.4 *Il existe au plus une solution C^2 de l'équation (8.1) κ-admissible et nulle à l'infini.*

8.4 Existence d'une solution κ-admissible

Pour résoudre l'équation (8.1) dans $\mathcal{a}_p^{k+2,\alpha}$, nous utilisons la méthode de continuité comme dans le cas réel (Section 5.2, Chapitre 5). Donc pour $t \in [0,1]$, nous considérons l'équation de continuité :

$$\frac{1}{\binom{n}{\kappa}} \mathrm{F}_\kappa(M_u) = (1 + t\phi) = \psi_t \tag{8.6}$$

ou encore :

$$\mathrm{N}_\kappa[u_t] := \log[\tilde{\sigma}_\kappa(\lambda(M_{u_t}))] = \log[1 + t\phi] = \log(\psi_t) \tag{8.7}$$

et l'ensemble : $\mathcal{T} = \{t \in [0,1]$ tel que, il existe $u_t \in \mathcal{a}_p^{k+2,\alpha}$ solution de (8.7) $\}$ qui est non vide car $u_0 = 0$ est solution κ-admissible de (8.7) pour $t = 0$.

D'après le Théorème 8.1 (voir plus loin), et comme la κ-admissibilité est une propriétés ouverte, nous obtenons que $\mathcal{T}$ est relativement ouvert dans $[0,1]$.

La résolution de l'équation (8.7) est donc réduite à construire une estimation *a priori* sur les solutions u_t dans l'espace $C_p^{2,\alpha}$, et à démontrer que l'équation de continuité (8.7) est uniformément elliptique indépendamment de $t \in [0,1]$. En particulier, la κ-admissibilité de u_t avec t adhérent à $\mathcal{T}$ est assurée par l'équation (8.7) elle-même (elle a lieu à l'infini où $\partial_{i\bar{j}} u_t \to 0$) et on la propage aisément à tout $\mathbb{C}^n$. Conclusion $\mathcal{T} = [0,1]$ et l'équation (8.1), obtenue pour $t = 1$, est donc résolue.

8.5 Estimations *a priori* et ellipticité uniforme

Dans cette section nous montrons l'existence d'une solution radiale unique quand la donnée ϕ est radiale, et nous décrivons les estimations *a priori*, sur $u_t \in C_p^{2,\alpha}$ solution κ-admissible de (8.7).

8.5.1 Existence d'une solution radiale

Proposition 8.3 (Calcul de la solution radiale) *Si ϕ est radiale, avec $1+\phi > 0$, alors la solution radiale $u(z) = U(r)$ nulle à l'infini de classe $C^2(\mathbb{C}^n)$ de l'équation (8.1) s'écrit formellement :*

$$U(r) = -2\int_r^{\infty} s\left[\left(1+2n\int_0^1 \varphi(\tau s)\tau^{2n-1}d\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right] ds$$

Preuve : En notant

$$u(z) \equiv U(r)\ ,\ \dot{U} = \frac{dU}{dr}\ ,\ \ddot{U} = \frac{d^2U}{dr^2}$$

on obtient :

$$\partial_{i\bar{j}}u(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\bar{z}_i z_j}{r^2}\left(\ddot{U} - \frac{\dot{U}}{r}\right) + \delta_{ij}\frac{\dot{U}}{r}\right).$$

Pour faire le calcul de $\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(M_u)]$ au point $z \neq 0$, on se ramène par transformation unitaire (isométrie de $\mathbb{C}^n$) au cas $z = (r, 0, \ldots, 0)$. Alors, si u satisfait l'équation (8.1), U verifie l'équation différentielle suivante :

$$\tfrac{\kappa}{4n}\left(\ddot{U} + \tfrac{\dot{U}}{r} + 4\right)\left(\tfrac{\dot{U}}{2r} + 1\right)^{\kappa-1} + \tfrac{n-\kappa}{n}\left(\tfrac{\dot{U}}{2r} + 1\right)^{\kappa} = 1 + \phi$$

on en déduit :

$$\left(\tfrac{\ddot{U}}{2} + 1\right) + \tfrac{2n-\kappa}{\kappa}\left(\tfrac{\dot{U}}{2r} + 1\right) = \psi\left(\tfrac{\dot{U}}{2r} + 1\right)^{(1-\kappa)} \quad avec \quad \psi = \tfrac{2n}{\kappa}(1+\varphi)$$

On pose

$$v(r) = \tfrac{1}{2}\dot{U}(r)$$

alors l'équation sera :

$$(\dot{v} + 1) + \frac{2n-\kappa}{\kappa}\left(\frac{v}{r} + 1\right) = \psi\left(\frac{v}{r} + 1\right)^{1-\kappa}$$

et nous retrouvons là, ici en dimension $2n$, une équation différentielle intermédiaire déjà rencontrée dans la preuve de la Proposition 7.1. Nous pouvons donc écrire sa solution :

$$v(r) = r\left[(1 + 2n\int_0^1 \varphi(\tau r)\tau^{2n-1}d\tau)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right]. \tag{8.8}$$

Comme $v(r) = \frac{1}{2}\dot{U}(r)$ et $U(\infty) = 0$, on en déduit formellement :

$$U(r) = -2\int_r^\infty s\left[\left(1 + 2n\int_0^1 \varphi(\tau s)\tau^{2n-1}d\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right] ds$$

■

8.5.2 Estimation d'ordre zéro pondérée

Nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition 8.4 *Soit $u \in C^2(\mathbb{C}^n)$ solution nulle à l'infini de l'équation (8.7) avec : $\phi(z,\bar{z}) = \varphi(r)$, $\phi \in C^0_{p+2}, p \in (0, 2n-2)$ et $1+\phi > 0$. Alors $u(z) = U(r)$ et $u \in C^0_p$; précisément on a :*

$$\|u\|_{C^0_p} \leq 4n[p(2n-2-p)]^{-1}\|\phi\|_{C^0_{p+2}}$$

Preuve : D'après la Proposition 8.3, $u(z) = U(r)$, s'écrit :

$$U(r) = -2\int_r^\infty s\left[\left(1 + 2n\int_0^1 \varphi(\tau s)\tau^{2n-1}d\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right] ds$$

Donc la preuve est typiquement comme celle de la Proposition 7.2.

Passons à l'estimation de $\|u_t\|_{C^0_p}$ pour u_t solution de l'équation (8.7) générale (sans radialité). Nous allons construire des solutions supérieure u^+ et inférieure $u^- \leq u^+$ radiales auxquelles s'appliquera la Proposition 8.4.

Comme $\phi \in C^0_{p+2}(\mathbb{C}^n)$, il existe des constantes $0 < C_1 \leq C_2$ telles que :

$$1 + \phi^+ \equiv \exp\left(-C_1\sigma^{(-p-2)}\right) \leq 1 + t\phi \leq 1 + C_2\sigma(r)^{-p-2} \equiv 1 + \phi^-$$

Soient $u^\pm$ la solution radiale formelle de l'équation : $\mathrm{N}_\kappa[u^\pm] = \log(1+\phi^\pm)$ donnée par la Proposition 8.3, et $C^\pm := \|\phi^\pm\|_{C^0_{p+2}}$ (donc $C^- = C_2$). On a $u^\pm \in C^2(\mathbb{C}^n) \cap C^0_p$ d'après la Proposition 8.4, avec ici :

$$\|u^\pm\|_{C^0_p} \leq 4n[p(2n-2-p)]^{-1}C^\pm.$$

On a par construction

$$1 + \varphi^+ = \mathrm{N}_\kappa[u^+] \leq \mathrm{N}_\kappa[u_t] \leq \mathrm{N}_\kappa[u^-] = 1 + \varphi^-. \tag{8.9}$$

On vérifie aisément que les fonctions radiales $u^\pm$ sont κ-admissibles à l'origine de $\mathbb{C}^n$ et, comme $\mathrm{N}_\kappa[u^\pm] > 0$, elles doivent le rester partout. En appliquant le principe de comparaison (Lemme 8.3) dans $C^2(\mathbb{C}^n) \cap C^0_p$ aux deux inégalités dans l'équation (8.9), on déduit l'encadrement :

$$u^- \leq u_t \leq u^+.$$

Celui-ci fournit l'estimation cherchée, à savoir :

$$\sigma(x)^p |u_t(x)| \leq 4n[p(2n-2-p)]^{-1} \max(C^+, C^-)$$

8.5.3 Estimation d'ordre 2 sans poids et ellipticité uniforme

Soit $z = (z_1, \ldots, z_n) = (x_1 + \boldsymbol{i}x_{n+1}, \ldots, x_n + \boldsymbol{i}x_{2n}) \in \mathbb{C}^n$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{2n}) \in \mathbf{S}^{2n-1}$ et on note par $\partial_{\xi\xi} = \partial_\xi^2$ avec $\partial_\xi = \sum_{j=1}^n \xi_{2j-1}\partial_j + \sum_{j=1}^n \xi_{2j}\partial_{n+j}$

Lemme 8.4 *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de $t \in [0,1]$ telle que, pour tout vecteur unitaire ξ et tout $z \in \mathbb{C}^n$,*

$$|\partial_{\xi\xi} u_t(z)| \leq C.$$

Preuve : En appliquant ∂_ξ deux fois à l'équation (8.7), on trouve :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{N}_\kappa}{\partial m_{i\bar{j}} \partial m_{k\bar{l}}} \partial_\xi (u_t)_{i\bar{j}} \partial_\xi (u_t)_{k\bar{l}} + \frac{\partial \mathrm{N}_\kappa}{\partial m_{i\bar{j}}} \partial_{\xi\xi} (u_t)_{i\bar{j}} = \binom{n}{\kappa} \partial_{\xi\xi} \log(\psi_t) \tag{8.10}$$

Donc, d'après la concavité de N_κ (voir [11] page 96), on déduit de (8.10)

$$\frac{\partial \mathrm{N}_\kappa}{\partial m_{i\bar{j}}} \partial_{\xi\xi} (u_t)_{i\bar{j}} \geq \binom{n}{\kappa} \partial_{\xi\xi} \log(\psi_t)$$

On diagonalise $\partial_{i\bar{j}} u$, on pose $\big((\lambda_t)_i = 1 + (u_t)_{i\bar{i}}\big)$, on arrive à l'équation (7.7), donc d'après la preuve du Lemme 7.3, on obtient :

$$\partial_{\xi\xi} u_t(z) \leq C.$$

En plus, comme u_t est κ-admissible on obtient :

$$\sigma_1 = n + \sum_{i=1}^n \partial_{i\bar{i}} u_t = n + \frac{1}{4} \sum_{I=1}^{2n} \partial_{II} u_t > 0$$

donc $\forall I_0$,

$$C \geq \partial_{I_0 I_0} u_t \geq -4n - (2n-1)C.$$

Cette inégalité est bien sûr valide dans tout repère orthonormé. Donc $\exists C,\ \forall\ z \in \mathbb{C}^n$, $\forall\ |\xi| = 1,\ \forall\ t \in [0,1]$, :

$$|\partial_{\xi\xi}(u_t)| \leq C$$

Pour finir, on prend

$$\partial_\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_I \pm \partial_J\right) \text{ pour } I \neq J$$

et on conclut qu'il existe C indépendante de $t \in [0,1]$ telle que :

$$|\partial_{IJ}(u_t)| \leq C.$$

Enregistrons maintenant l'important résultat d'ellipticité uniforme suivant :

Corollaire 8.5 (Ellipticité uniforme de l'équation (8.6)) *Il existe deux réels* λ, Λ *positifs tels que :* $\forall\ t \in \mathcal{T}, \forall\ \xi \in (C^n)^\star, \forall\ z \in \mathbb{C}^n$,

$$\lambda|\xi|^2 \leq \frac{\partial \mathfrak{F}_\kappa}{\partial m_{i\bar{j}}}[u_t]\xi_i\bar{\xi}_j \leq \Lambda|\xi|^2$$

Preuve : Après une transformation unitaire qui diagonalise $\partial_{i\bar{j}} u$, on a :

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_\kappa}{\partial m_{i\bar{j}}}[u_t] = \delta_{ij}\frac{\partial \sigma_\kappa}{\partial \lambda_i}[\lambda(M_u)]$$

Comme $\lambda(M_u) \in \Gamma_\kappa$, nous sommes maintenant ramenés exactement à la preuve du Lemme 7.6.

8.5.4 Estimations non linéaires pondérées

Nous utilisons une technique de *scaling* (qui remonte à [1]) pour construire l'estimation $C_p^{2,\alpha}$. Soit $u \in C_p^4(\mathbb{C}^n)$ κ-admissible et supposons $\mathrm{N}_\kappa[u] = f \in C^2_{p+2}(\mathbb{C}^n)$. Pour $(z_0, \rho) \in \mathbb{C}^n \times (0,1)$ fixé, on définit sur la boule $B_\rho^{z_0}$ de centre z_0 de rayon ρ, les deux fonctions :

$$u_{z_0}(Z) := [\sigma(z_0)]^p u(z)\ ,\ \ f_{z_0}(Z) := [\sigma(z_0)]^{p+2}\mathrm{N}_\kappa[u](z) \equiv \mathrm{N}_{z_0}[u_{z_0}](Z)$$

avec $Z = \dfrac{z - z_0}{\sigma(z_0)}$.

Par hypothèse f_{z_0} est bornée dans $C^2(B_\rho^{z_0})$ indépendamment de z_0, et u_{z_0} l'est dans

$C^0(B_\rho^{z_0})$ indépendamment de z_0, grâce à notre estimation de $\|u\|_{C_p^0}$. On vérifie facilement que $\partial_{i\bar{j}} u_{z_0}(Z) \equiv (\sigma(z_0))^{p+2} \partial_{i\bar{j}} u(z)$.
L'opérateur auxiliaire N_{z_0} juste défini sur $B_\rho^{z_0}$ est concave par rapport à la variable hermitienne $\partial_{i\bar{j}} u_{z_0}$, donc aussi par rapport à la variable symétrique réelle $\partial_{IJ} u_{z_0}$ (voir (8.4)). Les valeurs propres du symbole de son linéarisé sont encadrées, sur $B_\rho^{z_0}$, entre deux réels $0 < \lambda \leq \Lambda$ i.e. il est uniformément elliptique sur $B_\rho^{z_0}$. En outre, N_{z_0} se factorise à travers la seule variable $\partial_{i\bar{j}} u_{z_0}$. En ce cas, selon une estimation *a priori* intérieure non linéaire de Gilbarg-Trudinger (équation (17.42) [8] p.456) appliquée dans $B_\rho^{z_0}$ à l'équation $\mathrm{N}_{z_0}[u_{z_0}] = f_{z_0}$, il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha \in (0,1)$ dépendant seulement de n, λ et Λ telles que :

$$\|u_{z_0}\|^*_{C^{2,\alpha}(B_\rho)} \leq C\{\|f_{z_0}\|^*_{C^2(B_\rho)} + \|u_{z_0}\|^*_{C^2(B_\rho)}\}$$

En raisonnant comme dans la preuve de l'estimations non linéaires pondérées dans le cas réel, d'après la Définition 8.3 et la Proposition 8.2, combinés au Corollaire 8.5 on obtient le résultat.

Références bibliographiques

[1] Bando, S.; Kobayashi, R. Ricci-flat Kähler metrics on affine algebriac manifolds, *II Math. Ann.* **287** (1990), 175-180.

[2] Bayard, P. *Problème de Dirichlet pour la courbure d'ordre m Lorentzienne.* Thèse de Doctorat mathématiques, Université de Nice–Sophia Antipolis. 2001.

[3] Brézis, H.; *Analyse fonctionnelle*, in: Collect. Math. Appl. Maîtrise, Masson, Paris, 1983.

[4] Caffarelli, L.; Nirenberg, L. and Spruck, J.: The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian,*Acta Math.*, **155** (1986), 261-301.

[5] Delanoë, P.; Partial decay on simple manifolds, *Ann. Global Anal. Geom.* **10** (1992) 3-61.

[6] Delanoë, P.; Radially symmetric boundary value problems for real and complex elliptic Monge-Ampère equations, *J. Differential Equations* **58** (1985) 318-344.

[7] Gårding, L.; An inequality for hyperbolic polynomials, *J. Math. Mech.* **8** (1959), 957-965.

[8] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.; *Elliptic partial differential equations of second order.* Second Edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **224**, Springer-verlag Berlin Heidelberg 1983.

[9] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Polya, G.; *Inequalities*, Cambridge University Press, 2nd ed., 1988.

[10] Kato, T.; *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.

[11] Li, S-Y.; On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian, *Asian J. Math.* **8**(2004), 87-106.

[12] Li, Y & Ni, W.-M.; On conformal scalar curvature equations in $\mathbb{R}^n$, *Duke Math.J.* **57:3**(1988), 895-924.

[13] Littman, W.; Stampacchia, G.; Weinberger, H.F.: Regular points for ellipticequations with discontinuous coefficients. *Ann. Scuola Norm. Sup.* Pisa Cl. Sci. **17**(1963), 43-77.

[14] Marcus, M.; An eigenvalue inequality for the product of normal matrices, *Amer. Math. Monthly*, **63** (1956), 173-174.

[15] Protter, Murray H.; Weinberger, H.F.: *Maximum Principle in Differential Equations.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967.

[16] Reilly, R. C.; On the Hessian of a function and the curvatures of its graph. *Michigan Math. J.*, **20** (1973), 373-383.

[17] Royden, H.L.; The growth of a fundamental solution of an elliptic divergence structure equation. *Studies Math. Anal. Related Topics.* Stanford Univ. Press 1962, 333-340.

[18] Yu, Y.; *The Index Theorem and the Heat Equation Method.* Nankai Tracks in Mathematics Vol. 2. World Scientific, Singapore, 2001.

[19] Zwillinger, D.; *Handbook of Differential Equations*, Third Edition, Academic Press, Boston, 1997.

Index

SOLUTIONS ENTIÈRES D'ÉQUATIONS HESSIENNES

Mouhamad HOSSEIN

Résumé : On étudie dans cette thèse l'existence et l'unicité de solutions entières, dans des espaces de Hölder à poids appropriés, d'équations hessiennes elliptiques dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, invariantes par rotation.

Abstract : We study in this thesis the existence and uniqueness of entire solutions, in appropriate weighted Hölder spaces, of elliptic Hessian equations in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{C}^n$, with rotational invariance.

Mots-clés : Équations hessiennes, Espaces de Hölder à poids, Estimation *a priori*, Méthode de continuité, Équations non linéaires elliptiques, Solutions entières.

Key words : Hessian equations, Weighted Hölder spaces, *A priori* estimates, Method of continuity, nonlinear elliptic equations, Entire solution.
